

### **Exercice 01 :**

Dans lesquelles des propositions suivantes, les parenthèses sont inutiles ?

- |                                    |                                                |                                          |
|------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|
| a) $\neg A \Rightarrow (A \vee B)$ | c) $\neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$ | e) $\neg (C \vee B)$                     |
| b) $(B \wedge C) \Rightarrow A$    | d) $((A \vee B) \wedge \neg C) \Rightarrow A$  | f) $B \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ |

### **Solution de l'exercice 01**

En suivant l'ordre des connecteurs vue en cours ; les parenthèses sont inutiles dans les propositions suivantes :

- |                                                                                             |                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| a) $\neg A \Rightarrow (A \vee B) \equiv \neg A \Rightarrow A \vee B$                       | b) $(B \wedge C) \Rightarrow A \equiv B \wedge C \Rightarrow A$ |
| d) $((A \vee B) \wedge \neg C) \Rightarrow A \equiv (A \vee B) \wedge \neg C \Rightarrow A$ |                                                                 |

### **Exercice 02 :**

Donner la table de vérité des propositions suivantes :

- |                      |                      |                                                             |
|----------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------|
| a) $\neg P \wedge Q$ | b) $\neg (P \vee Q)$ | c) $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$ |
|----------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------|

### **Solution de l'exercice 02**

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \vee Q)$	$\neg (P \vee Q)$	$(\neg P \vee Q)$	$(P \Rightarrow \neg Q)$	$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$
V	V	F	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

### **Exercice 03 :**

Quelles sont les valeurs de vérité des littéraux P, Q et R qui rendent fausses les formules suivantes ?

- |                                                             |                                                           |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| a) $R \wedge \neg P \Rightarrow (Q \vee (R \Rightarrow P))$ | b) $[Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)] \vee \neg R \vee P$ |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|

### **Solution de l'exercice 03**

a) Pour que :  $R \wedge \neg P \Rightarrow (Q \vee (R \Rightarrow P))$  soit fausse :

Il faut que :  $R \wedge \neg P$  soit Vraie et  $(Q \vee (R \Rightarrow P))$  soit Fausse.

Responsable de la matière : ATTIA Safa

Date : 24/01/2021

Année universitaire : 2020/2021

On a  $R \wedge \neg P$  est vraie donc : **R est vrai** et  $\neg P$  est vrai.

On a  $\neg P$  est vrai donc : **P est Faux.**

On remplaçant la valeur de R et P dans  $(R \Rightarrow P)$  on trouve que  $(R \Rightarrow P)$  est Fausse.

On a  $(Q \vee (R \Rightarrow P))$  est Fausse et  $(R \Rightarrow P)$  est Fausse donc **Q est Faux.**

b) Pour que :  $[Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)] \vee \neg R \vee P$  soit Fausse :

Il faut que :

$[Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)]$  soit Fausse

Et  $\neg R$  soit Faux (donc **R est vrai**)

Et **P soit Faux**

On remplaçant la valeur de R et P dans  $(R \Rightarrow P)$  on trouve  $(R \Rightarrow P)$  est Fausse.

On a  $[Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)]$  est Fausse et  $(R \Rightarrow P)$  est Fausse donc **Q est Vrai.**

#### **Exercice 04 :**

On considère les formules de la logique des propositions :

$$\alpha = [(P \Rightarrow R) \vee (\neg Q \vee S \vee (S \wedge Q))] \wedge [(P \wedge Q) \Rightarrow (R \vee S)]$$

$$\beta = (P \Rightarrow S) \vee (Q \Rightarrow R)$$

En utilisant les équivalences remarquables, montrer que  $\alpha \equiv \beta$ .

#### **Solution de l'exercice 04**

$$\alpha = [(P \Rightarrow R) \vee (\neg Q \vee S \vee (S \wedge Q))] \wedge [(P \wedge Q) \Rightarrow (R \vee S)]$$

$$\alpha = [(P \Rightarrow R) \vee (\neg Q \vee S)] \wedge [(P \wedge Q) \Rightarrow (R \vee S)] \quad // \quad A \vee (A \wedge B) = A$$

$$\alpha = [(\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee S)] \wedge [\neg(P \wedge Q) \vee (R \vee S)]$$

$$\alpha = (\neg P \vee R \vee \neg Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R \vee S)$$

$$\alpha = (\neg P \vee R \vee \neg Q \vee S) \quad // \quad A \wedge A = A$$

$$\alpha = (\neg P \vee S) \vee (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha = (P \Rightarrow S) \vee (Q \Rightarrow R) = \beta$$

#### **Exercice 05 :**

En utilisant la méthode des tables de vérité, voir si les formules suivantes sont : satisfiables, insatisfiables ou tautologies :

a)  $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

c)  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

b)  $P \vee \neg(P \wedge Q)$

d)  $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$

### Solution de l'exercice 05

P	Q	$\neg P$	$(P \wedge Q)$	$(\neg P \vee Q)$	<b>a</b>	$\neg(P \wedge Q)$	<b>b</b>	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	c	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	d
V	V	F	V	V	<b>V</b>	F	<b>V</b>	V	V	<b>V</b>	F	<b>F</b>
V	F	F	F	F	<b>F</b>	V	<b>V</b>	F	V	<b>V</b>	V	<b>F</b>
F	V	V	F	V	<b>F</b>	V	<b>V</b>	V	F	<b>F</b>	V	<b>F</b>
F	F	V	F	V	<b>F</b>	V	<b>V</b>	V	V	<b>V</b>	F	<b>F</b>

D'après la table de vérité :

Les formules a et c sont : satisfiables.

La formule b est une : tautologie et satisfiable.

La formule d est : insatisfiable.

### **Exercice 06 :**

Montrer que la proposition  $\alpha : (\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$  est une tautologie :

- En calculant sa table de vérité,
- Par l'absurde, en supposant qu'il existe des valeurs de P et Q qui la rendent fausse,
- En utilisant les équivalences remarquables de la logique des propositions.

### Solution de l'exercice 06

a) En calculant sa table de vérité :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \rightarrow \neg Q$	$\neg P \rightarrow Q$	$(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P$	$\alpha$
V	V	F	F	V	V	V	<b>V</b>
V	F	F	V	V	V	V	<b>V</b>
F	V	V	F	F	V	F	<b>V</b>
F	F	V	V	V	F	V	<b>V</b>

Toutes les valeurs de  $\alpha$  sont vraies donc :  $\alpha$  est une tautologie.

b) Par l'absurde :

On suppose que :  $\neg (\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$  c.à.d il existe au moins une ligne où sa valeur de vérité est Fausse.

$(\neg P \rightarrow \neg Q)$  ..... Vraie (1)

$((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$  ..... Fausse (2)

A partir de (2) :  $(\neg P \rightarrow Q)$  : Vraie (3)

P : Faux (4)

On remplaçant (4) dans (3) : Q = Vrai (5)

On remplaçant (4) et (5) dans (1) :  $(\neg P \rightarrow \neg Q)$  : Fausse

Ce qui est une contradiction avec (1). Donc :  $\alpha$  est une tautologie.

Responsable de la matière : ATTIA Safa

Date : 24/01/2021

Année universitaire : 2020/2021

c) En utilisant les équivalences remarquables :

$$\alpha = (\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$$

$$\alpha = \neg (\neg P \rightarrow \neg Q) \vee ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$$

$$\alpha = \neg (P \vee \neg Q) \vee (\neg (P \vee Q) \vee P)$$

$$\alpha = \neg (P \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee P$$

$$\alpha = \neg (P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee P) \wedge (P \vee \neg Q) \quad // (\neg P \vee P) \text{ est tjrs Vraie}$$

$$\alpha = \neg (P \vee \neg Q) \vee (P \vee \neg Q) \quad // (\neg P \vee P) \text{ est tjrs Vraie}$$

Donc :  $\alpha$  est une tautologie.