

Série1 - exercice 2

Exercice 2

On considère un réseau cubique **centré** de vecteurs de base \vec{a} , \vec{b} et \vec{c}

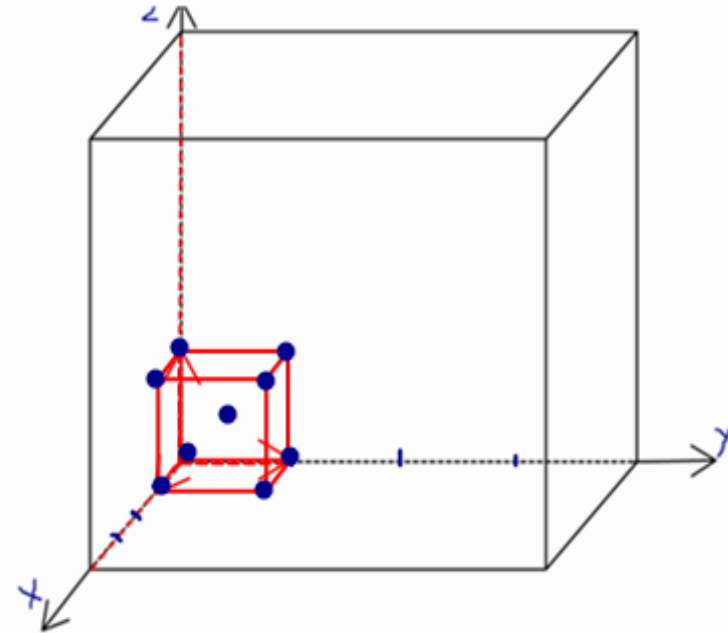
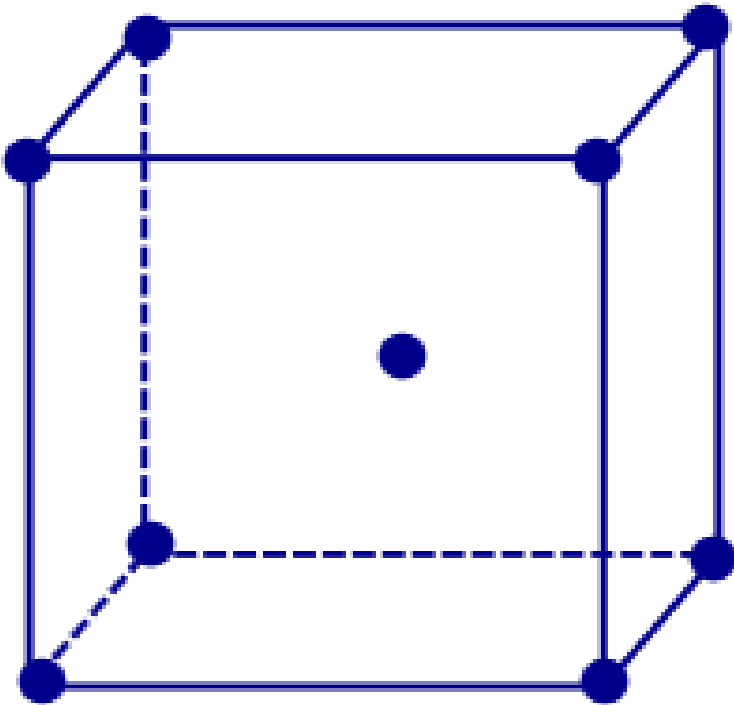
- 1)
 - a) Tracer les rangées réticulaires $[120]$; $[201]$ et $[04\bar{1}]$
 - b) Montrer que ces 3 rangées sont coplanaires
 - c) Déterminer la distance qui sépare deux nœuds consécutifs de la rangée $[201]$.
 - d) Déterminer l'angle θ entre les deux rangées $[120]$ et $[201]$.
- 2)
 - a) Construire les plans réticulaires P1 et P2 d'indices de Miller suivants :
P1 : (110) ; P2 : (111)
 - b) Donner les indices u^* , v^* et w^* des rangées réticulaires normales aux plans P1 et P2 respectivement.
 - c) Déterminer les indices u , v et w de la rangée commune aux deux familles de plans P1 et P2 en utilisant le réseau réciproque.
- 3) Construire et calculer la multiplicité de la maille tridimensionnelle définie par les vecteurs suivants :
$$\vec{V1} = \vec{a} + \vec{b} ; \quad \vec{V2} = 2\vec{b} ; \quad \vec{V3} = -\vec{c}$$

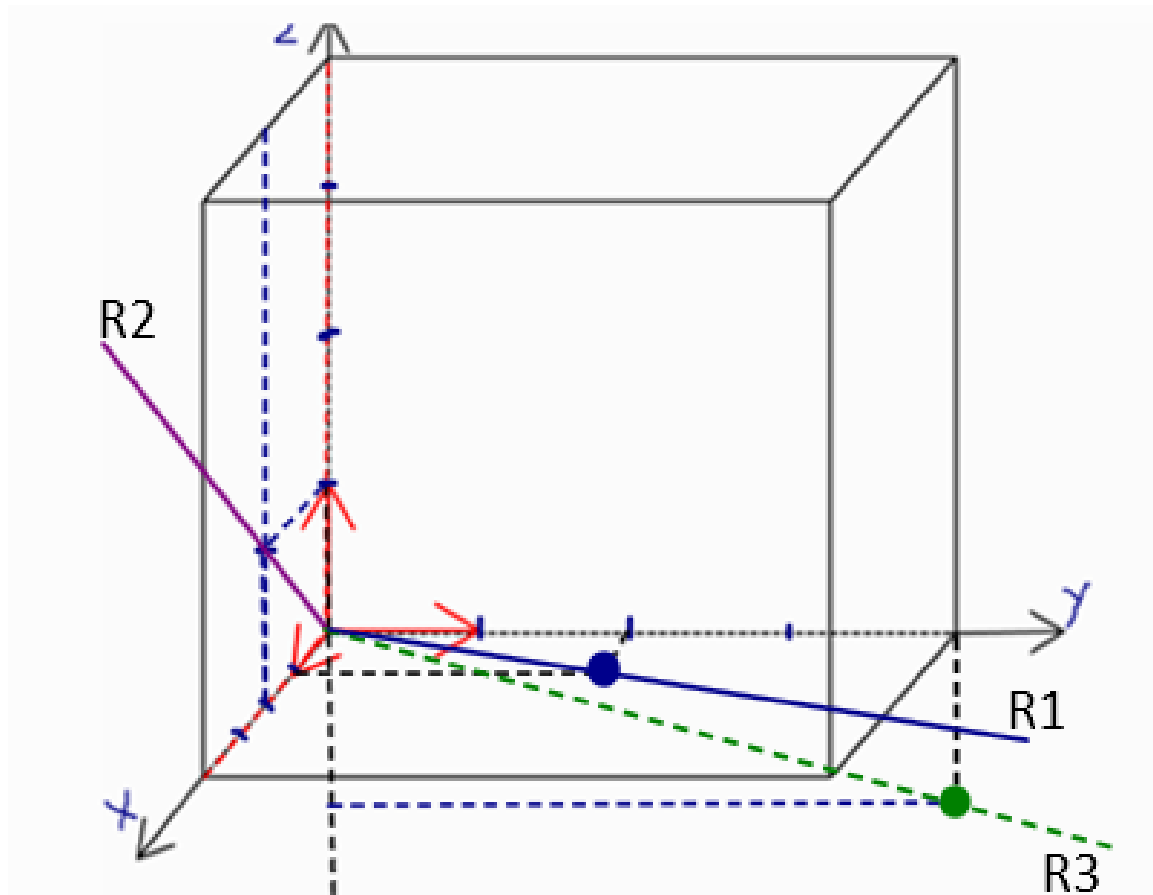
Réseau cubique centré

1-a Représenter les rangées $[120]$, $[201]$ et $[04\bar{1}]$

Les rangées $[120]$, $[201]$ et $[04\bar{1}]$ sont des droites portées respectivement par les vecteurs directeurs \vec{R}_1 , \vec{R}_2 et \vec{R}_3

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= \vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{R}_2 &= 2\vec{a} + \vec{c} \\ \vec{R}_3 &= 4\vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$





$$\vec{R}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{R}_2 = 2\vec{a} + \vec{c}$$

$$\vec{R}_3 = 4\vec{b} - \vec{c}$$

$$R_1 : [120]$$

$$R_2 : [201]$$

$$R_3 : [04\bar{1}]$$

1-b Montrer que les rangées $[120]$, $[201]$ et $[04\bar{1}]$ sont coplanaires.

Pour montrer que ces trois rangées appartenant au même plan, il suffit de montrer que le volume construit sur les trois vecteurs directeurs des rangées R_1 , R_2 et R_3 est nul.

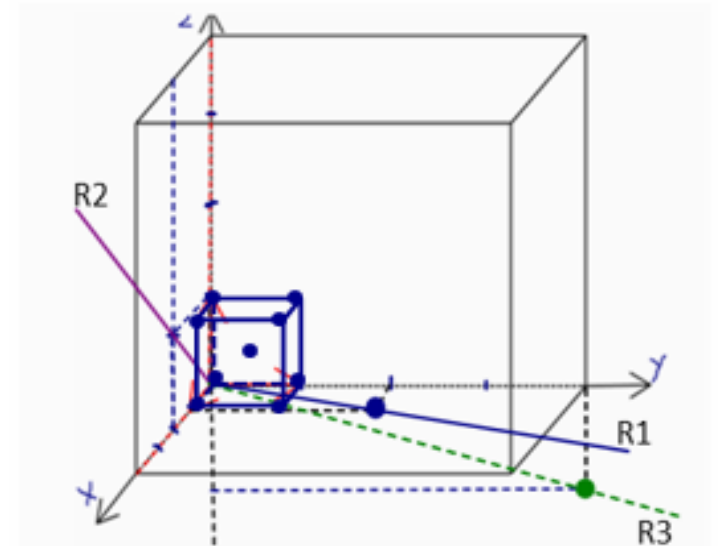
$$V = (\vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2) \cdot \vec{R}_3$$

$$V = \det(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3) (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$V = m v_0 \quad (v_0 \neq 0)$$

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$V = 0$$



Donc les trois rangées $[120]$, $[201]$ et $[04\bar{1}]$ sont coplanaires

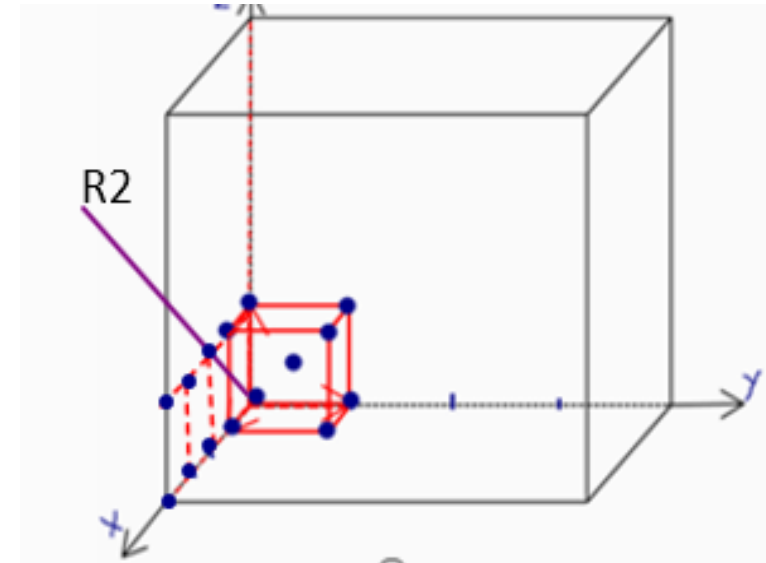
1-c Déterminer la distance qui sépare deux nœuds consécutifs de la rangée [201].

Le vecteur $\vec{R_2}(2,0,1)$ est directeur de la rangée [201], son module correspond à la distance d entre deux nœuds consécutifs :

$$d = |\vec{R_2}| = \sqrt{(2a)^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{4a^2 + c^2} \quad a=c \text{ (système cubique)}$$

$$d = a\sqrt{5}$$



1-d Déterminer l'angle θ entre les deux rangées [120] et [201].

$$\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = |\vec{R}_1| |\vec{R}_2| \cos \theta$$

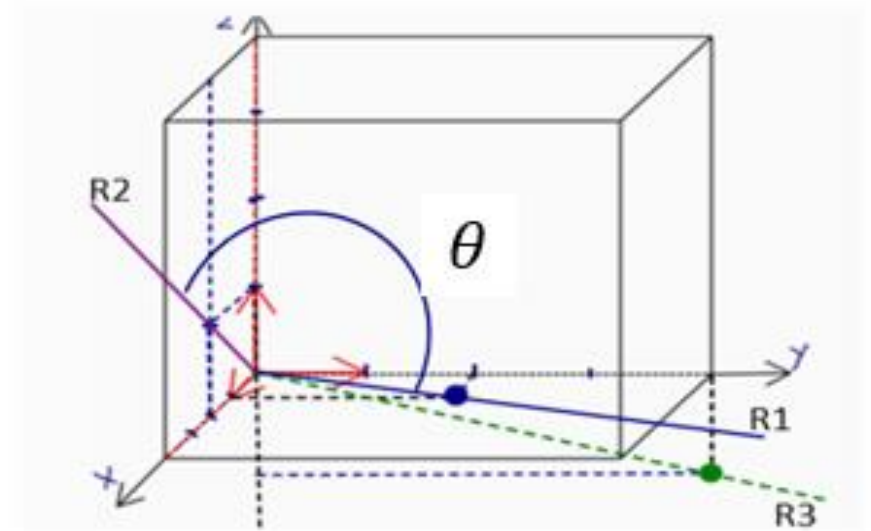
$$\cos \theta = \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{|\vec{R}_1| |\vec{R}_2|} = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{c})}{5a^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ (système cubique)}$$

$$\text{Avec } |\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = a\sqrt{5}$$

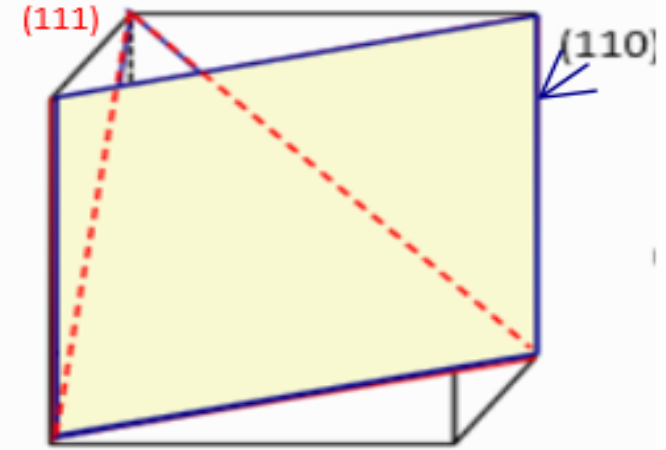
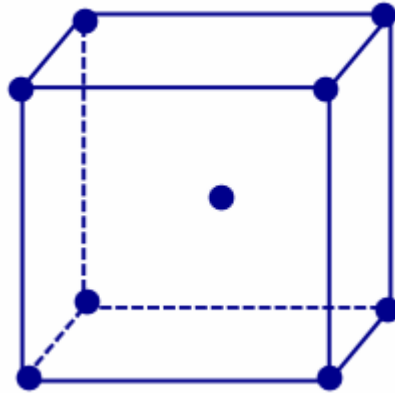
$$\cos \theta = \frac{2a^2}{5a^2} = \frac{2}{5}$$

$$\theta = 66,42^\circ$$



2-a) Construire les plans réticulaires P1 et P2 d'indices de Miller suivants :

P1 : (110) ; P2 : (111)



2-b) Donner les indices u^* , v^* et w^* des rangées réticulaires normales aux plans P1 et P2 respectivement.

Propriété du RR : toute rangée $[hkl]^*$ du réseau réciproque est perpendiculaire à la famille de plans (hkl) du réseau direct .

Donc La rangée $[110]^*$ est normal au plan (110) $([u^*=1, v^*=1 \text{ et } w^*=0])$

La rangée $[111]^*$ est normal au plan (111) $([u^*=1, v^*=1 \text{ et } w^*=1])$

2-c) Déterminer les indices u, v et w de la rangée commune aux deux familles de plans P1 et P2 en utilisant le réseau réciproque.

$$\text{On a: } \vec{a}^* = \frac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{v} \quad \text{de même} \quad \vec{a} = \frac{(\vec{b}^* \wedge \vec{c}^*)}{v^*}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs du RR est un vecteur du RD et inversement

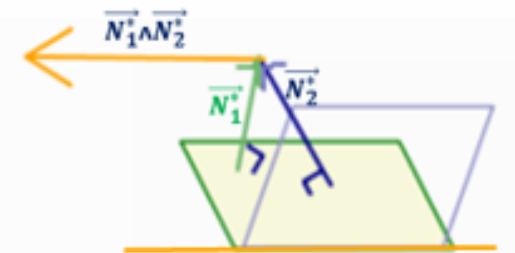
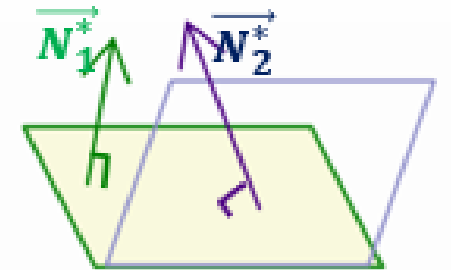
$$\vec{N}_1^* = \vec{a}^* + \vec{b}^* \quad \text{est } \perp \text{ au plan P1 (110)} \quad \text{et}$$

$$\vec{N}_2^* = \vec{a}^* + \vec{b}^* + \vec{c}^* \quad \text{est } \perp \text{ au plan P2 (111)}$$

$\vec{N}_1^* \wedge \vec{N}_2^*$ est un vecteur du **réseau direct** perpendiculaire aux deux vecteurs \vec{N}_1^* et \vec{N}_2^*

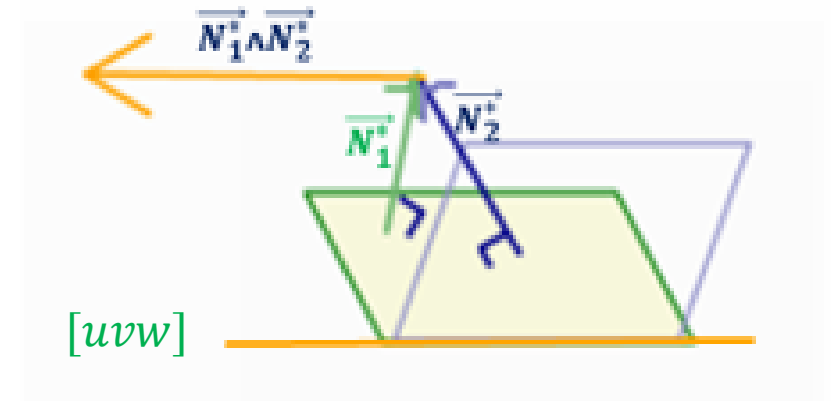
$\vec{N}_1^* \wedge \vec{N}_2^*$ est un vecteur // à la rangée [uvw].

Pour trouver les indices de la rangée [uvw], il suffit de trouver les coordonnées du vecteur $\vec{N}_1^* \wedge \vec{N}_2^*$



En formant le déterminant symbolique $\begin{matrix} \vec{N}_1^* \\ \vec{N}_2^* \end{matrix} \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve:

$$\begin{cases} u = (1 * 1) - (1 * 0) = 1 \\ v = -[(1 * 1) - (1 * 0)] = -1 \\ w = (1 * 1) - (1 * 1) = 0 \end{cases}$$



U, v et w sont des entiers premiers entre eux donc la rangée commune $[uvw]$ entre P1 et P2 correspond à la rangée $[1\bar{1}0]$

3- Construire et calculer la multiplicité de la maille tridimensionnel définie par les vecteurs suivants: $\vec{V1}(1,1,0)$; $\vec{V2}(0,2,0)$; $\vec{V3}(0,0,-1)$

Calcul de multiplicité

* Calcul vectoriel

$$V = (\vec{V1} \wedge \vec{V2}) \cdot \vec{V3}$$

$$V = \det(\vec{V1}, \vec{V2}, \vec{V3}) \cdot V_0$$

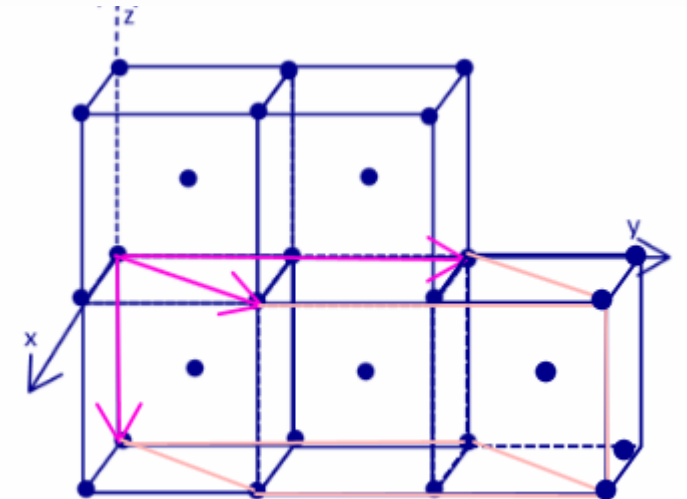
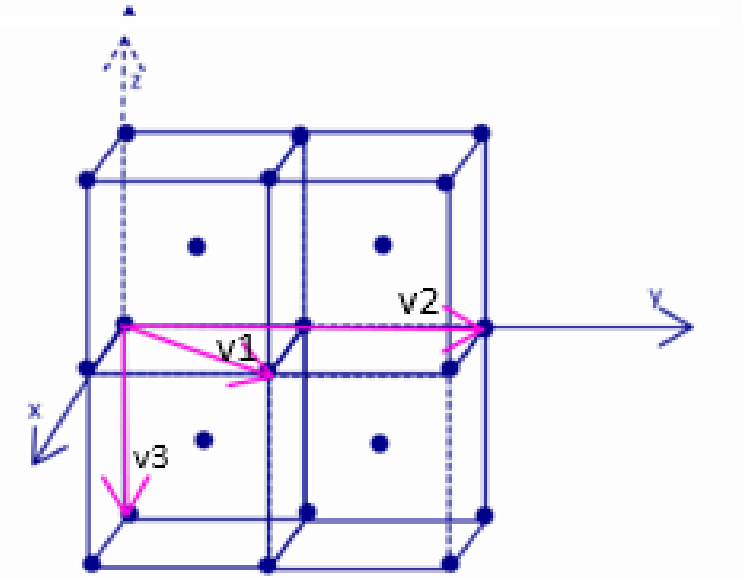
$$m' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = |-2| = 2$$

or la maille élémentaire est double (cubique centré)

$$m = 2m' = 4$$

* Dénombrement atomique

$$m = 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 = 4$$



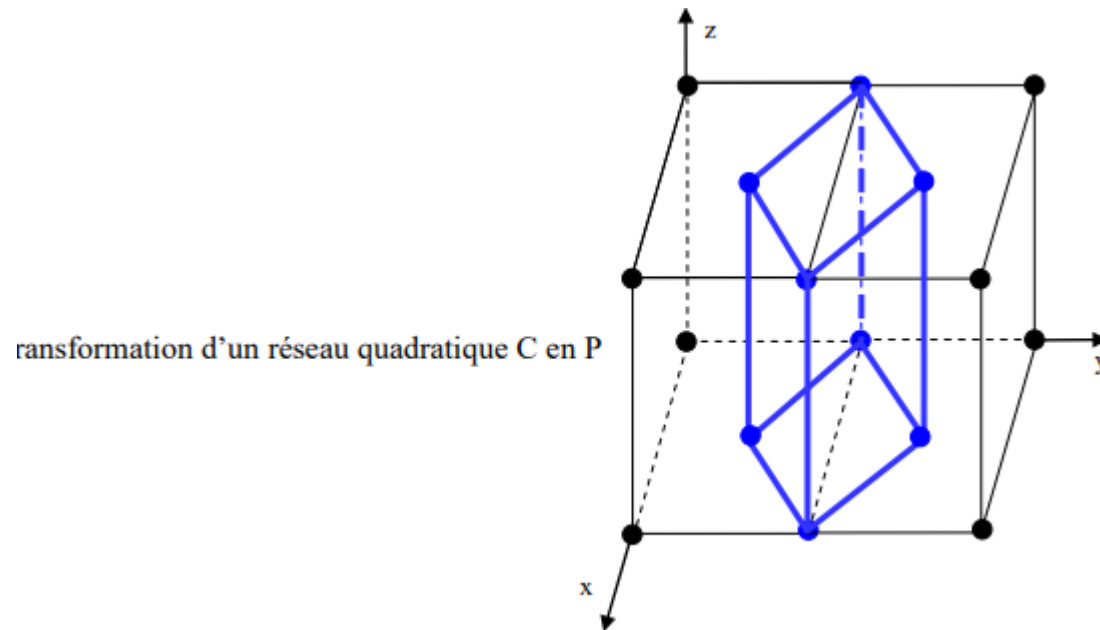
- 2) Certains modes de bravais n'existent pas dans certains systèmes cristallins. Ainsi, par exemple, les modes C (A ou B) et F n'existent pas dans le système quadratique. Expliquer pour quelle raison.

SOLUTION

En général, si un mode donné n'existe pas c'est parce que la maille qui le représente peut être remplacée par une maille de multiplicité plus petite compatible avec un autre mode.

a- Inexistence du réseau quadratique bases centrées C :

Si nous considérons par exemple un réseau quadratique bases centrées C (maille double de paramètres a et c), ce réseau sera remplacé par un réseau quadratique primitif (maille simple de paramètres $a' = a\sqrt{2}/2$ et $c' = c$: maille en gras) comme le montre la figure suivante :



Exercice 3

Certains modes de Bravais n'existent pas dans certains systèmes cristallins. Expliquer pourquoi le mode de réseau de Bravais F n'est pas retenu pour le système quadratique ?

III- RESEAUX DE BRAVAIS :

- 1) Quel est le nombre de réseaux de Bravais ? préciser les systèmes auxquels ils sont attribués.
- 2) Certains modes de Bravais n'existent pas dans certains systèmes cristallins. Ainsi, par exemple, les modes F et C (A ou B) n'existent pas dans le système quadratique. Expliquer pour quelle raison.

1) Quel est le nombre de réseaux de Bravais ? Préciser les systèmes auxquels ils sont attribués.

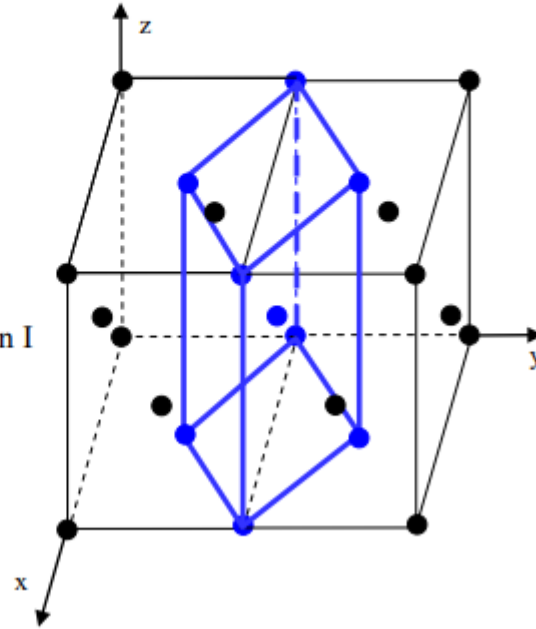
SOLUTION

Les réseaux de Bravais sont au nombre de 14 et sont répartis sur les systèmes cristallins comme suit :

b- Inexistence du réseau quadratique à faces centrées F:

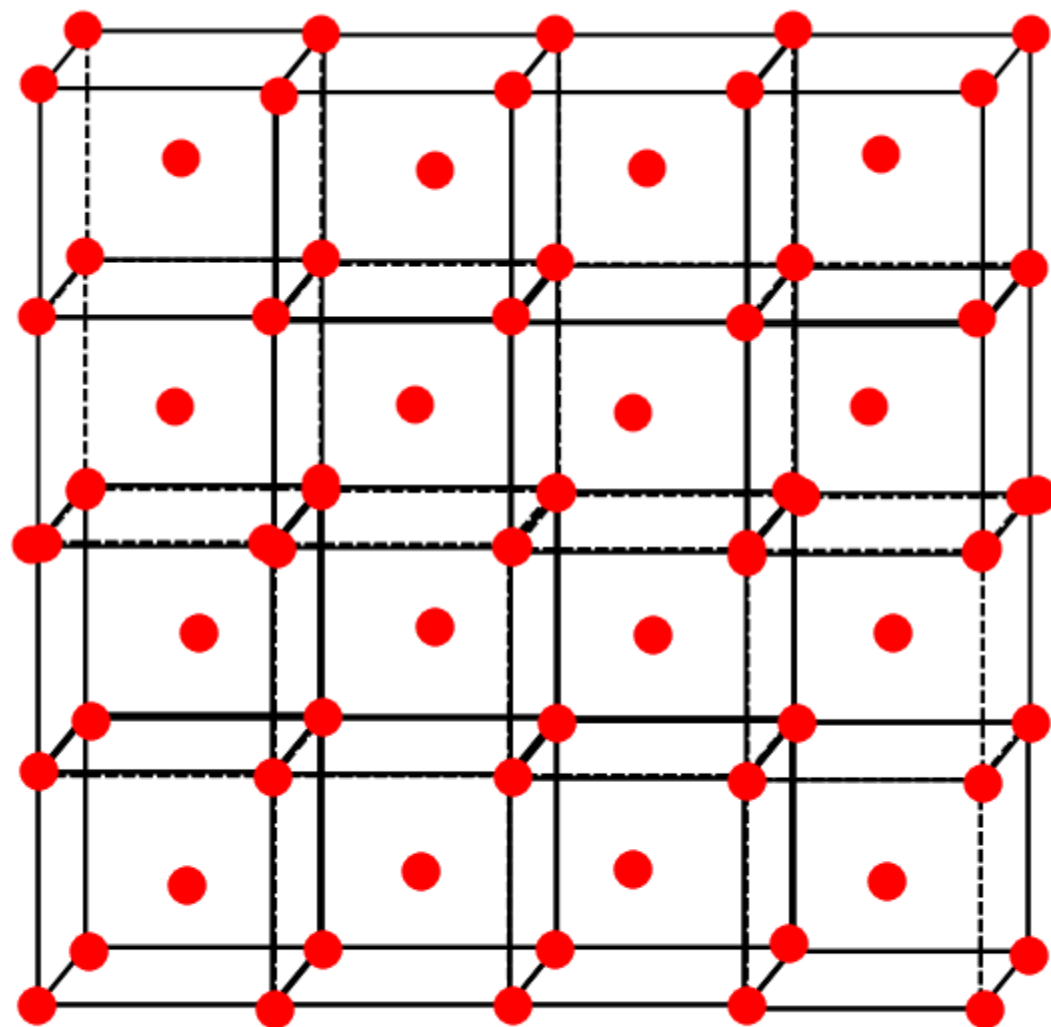
De même, si nous considérons un réseau quadratique à faces centrées F (maille quadruple de paramètres a et c), ce réseau sera remplacé par un réseau quadratique centré I (maille uniquement double de paramètres $a' = a\sqrt{2}/2$ et $c' = c$: maille en gras) comme le montre la figure suivante :

Transformation d'un réseau quadratique F en I



14

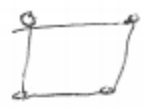
Ac
Λαα



EX 3 un réseau cristallin est la combinaison d'un réseau spatial et d'un motif qui est un atome ou un groupe d'atomes de même composition, même orientation et même position.

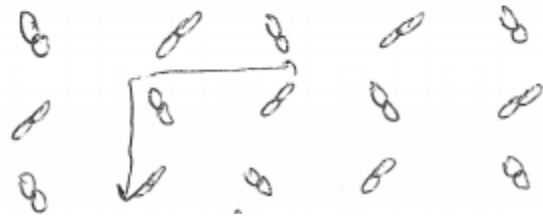
Rmq: Il n'est pas nécessaire que le motif soit sur le nœud du réseau mais dans le réseau.

une maille élémentaire est une maille qui contient un nœud (un motif de même composition, même orientation).



Dans cette figure, la répétition d'un atome se fait par translation entre deux atomes dans deux directions. La maille

élémentaire est donc un carré qui contient un seul motif le motif est l'atome lui-même.



... il n'y a qu'un seul motif.

