Chương III

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với khái niệm **nguyên hàm** và **tích phân**. Đây là hai khái niệm cơ bản, rất quan trọng của giải tích, có liên hệ mật thiết với khái niệm đạo hàm. Phép tính tích phân cho chúng ta một phương pháp tổng quát để tính diện tích của những hình phẳng và thể tích của những vật thể có hình dạng phức tạp. Phép tính tích phân được xem là một trong những thành tựu quan trọng nhất của toán học.

Học sinh cần rèn luyện kĩ năng tìm nguyên hàm, tính tích phân và biết áp dụng tích phân để tính diện tích một số hình phẳng và thể tích một số vật thể.

§ 1 NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Bài toán mở đầu. Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm t là $v(t) = 160 - 9,8t$ (m/s) (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm t.

Gọi $s(t)$ là quãng đường đi được của viên đạn sau khi bắn được t giây.

Ta đã biết $v(t) = s'(t)$. Do đó ta phải tìm hàm số $s = s(t)$ thoả mãn điều kiện :

$$s'(t) = 160 - 9,8t.$$

Nhiều vấn đề của khoa học và kĩ thuật đã dẫn tới bài toán sau đây :

Cho hàm số f xác định trên K, ở đó K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó. Hãy tìm hàm số F sao cho $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f xác định trên K. Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

CHÚ Ý

1) Trong trường hợp $K = [a; b]$, các đẳng thức $F'(a) = f(a)$, $F'(b) = f(b)$ được hiểu là

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

2) Cho hai hàm số f và F liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng $(a; b)$ thì có thể chứng minh được rằng $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$, do đó F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn $[a ; b]$.

Ví dụ 1

a) Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$ vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x) = \tan x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ vì $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Hàm số $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ vì $F'(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và cả hai hàm số f và F đều liên tục trên $[0; +\infty)$.

H1 *Các hàm số $F_1(x) = -2\cos 2x$ và $F_2(x) = -2\cos 2x + 2$ là những nguyên hàm của hàm số nào ?*

ĐỊNH LÍ 1

> Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó
>
> a) Với mỗi hằng số C, hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K.
>
> b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Chứng minh

a) Giả sử $G(x) = F(x) + C$. Khi đó $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

b) Đặt $H(x) = G(x) - F(x)$, ta có $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ với mọi $x \in K$. Vậy H là hàm số không đổi trên K, tức là $H(x) = C$ với C là một hằng số. Suy ra $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$. □

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm F của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $F(1) = -1$.

Giải. Dễ thấy $y = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ nên nguyên hàm F cần tìm có dạng $F(x) = x^3 + C$.

Vì $F(1) = -1$ nên $1^3 + C = -1$, suy ra $C = -2$. Vậy $F(x) = x^3 - 2$.

• Từ định lí 1 ta thấy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì mọi nguyên hàm của f trên K đều có dạng $F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K.

Họ tất cả các nguyên hàm của f trên K được kí hiệu là $\int f(x)\mathrm{d}x$. Vậy

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Người ta cũng dùng kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ để chỉ một nguyên hàm bất kì của f.

Vậy

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

(Về kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ xem bài Em có biết : "Nguồn gốc của kí hiệu nguyên hàm và tích phân" tr. 157).

• Người ta đã chứng minh được rằng : *Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.*

• Từ đây, trong các bài toán về nguyên hàm của một hàm số, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng hàm số đó là liên tục và nguyên hàm của nó được xét trên mỗi khoảng (nửa khoảng, đoạn) xác định của hàm số đó.

2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Bài toán tìm nguyên hàm là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm. Việc tìm nguyên hàm của một hàm số thường được đưa về tìm nguyên hàm của các hàm số đơn giản hơn. Sau đây là nguyên hàm của một số hàm số đơn giản thường gặp.

1) $\int 0\mathrm{d}x = C$, $\int \mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x = x + C$;

2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

4) Với k là hằng số khác 0

a) $\int \sin kx\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$;

b) $\int \cos kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin kx}{k} + C$;

c) $\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + C$;

d) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$;

5) a) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$;

b) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

Ta dễ dàng chứng minh các công thức trên bằng cách tính đạo hàm vế phải. Chẳng hạn, vì $\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right)' = \cos kx$ nên ta có công thức 4) b).

Ví dụ 3

a) $\int 4x^4\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}x^5 + C.$

b) $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

c) $\int \cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sin\dfrac{x}{2} + C.$

H2 *Tìm* *a)* $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$; *b)* $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

3. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì
>
> a) $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;
>
> b) Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có
>
> $$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. a) Ta cần chứng tỏ rằng vế phải là một nguyên hàm của $f + g$. Thật vậy ta có

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) + g(x).$$

b) Chứng minh tương tự. □

Dựa vào nguyên hàm của các hàm số thường gặp và vận dụng hai định lí trên ta có thể tính được nguyên hàm của nhiều hàm số khác.

Ví dụ 4. Tìm

a) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

b) $\int (x-1)(x^4 + 3x)\mathrm{d}x$;

c) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x}}{2}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C.$$

b) $\int(x-1)(x^4+3x)\mathrm{d}x = \int(x^5-x^4+3x^2-3x)\mathrm{d}x$

$$= \int x^5\,\mathrm{d}x - \int x^4\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x - \int 3x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + x^3 - \frac{3x^2}{2} + C.$$

c) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$

H3 *Tìm*

a) $\int(x^3+2x^2-4)\mathrm{d}x$;   b) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}$;   b) $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$;

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$;   d) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$;   e) $f(x) = 10^{2x}$.

2. Tìm

a) $\int(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$;   b) $\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}\mathrm{d}x$;

c) $\int 4\sin^2 x\,\mathrm{d}x$;   d) $\int \frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x.$

3. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :

Nguyên hàm của hàm số $y = x\sin x$ là

(A) $x^2\sin\frac{x}{2} + C$;   (B) $-x\cos x + C$;   (C) $-x\cos x + \sin x + C$.

4. Khẳng định sau đúng hay sai ?

Nếu $f(x) = (1-\sqrt{x})'$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x = -\sqrt{x} + C.$

§ 2 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f, tức là $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ thì
>
> $$\int f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = F[u(x)] + C. \qquad (1)$$

Chứng minh

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có

$$(F[u(x)] + C)' = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x).$$

Vậy ta có (1). □

CHÚ Ý

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$, $f[u(x)]$ là $f(u)$ và coi $\mathrm{d}u$ là vi phân của hàm số $u = u(x)$ (nghĩa là $\mathrm{d}u = \mathrm{d}u(x) = u'(x)\mathrm{d}x$).

Khi đó, công thức (1) được viết như sau :

$$\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x = \int f[u(x)]\mathrm{d}u(x) = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C = F[u(x)] + C. \qquad (2)$$

Ta nói đã thực hiện phép đổi biến $u = u(x)$.

Ví dụ 1. Tìm $\int (2x+1)^4\,\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có $(2x+1)^4\,dx = \frac{1}{2}(2x+1)^4(2x+1)'dx = \frac{1}{2}(2x+1)^4\,d(2x+1)$.

Đặt $u = u(x) = 2x+1$. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\int(2x+1)^4\,dx = \int\frac{1}{2}(2x+1)^4\,d(2x+1) = \int\frac{1}{2}u^4\,du = \frac{1}{2}\int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C.$$

H1 *Tìm* $\int 2x(x^2+1)^3\,dx$.

Ví dụ 2. Tìm $\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$.

Giải. Ta có

$$\frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+4}} = \frac{(x^2+4)'}{\sqrt[3]{x^2+4}}dx = (x^2+4)^{-\frac{1}{3}}d(x^2+4).$$

Đặt $u = x^2+4$. Áp dụng công thức (2), ta có

$$\int\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx = \int(x^2+4)^{-\frac{1}{3}}d(x^2+4) = \int u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}(x^2+4)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Ví dụ 3. Tìm $\int\cos(7x+5)dx$.

Giải. Ta có

$$\cos(7x+5)dx = \frac{1}{7}\cos(7x+5)(7x+5)'\,dx = \frac{1}{7}\cos(7x+5)\,d(7x+5).$$

Đặt $u = 7x+5$. Công thức (2) cho ta

$$\int\cos(7x+5)\,dx = \int\frac{1}{7}\cos(7x+5)\,d(7x+5) = \int\frac{1}{7}\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{7}\sin u + C = \frac{1}{7}\sin(7x+5) + C.$$

Ví dụ 4. Tìm $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Giải. Ta có

$$e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x}d(\sin x).$$

Đặt $u = \sin x$. Công thức (2) cho ta

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \int e^{\sin x}\,d(\sin x) = \int e^{u}\,du = e^{u} + C = e^{\sin x} + C.$$

H2 *Tìm* $\int x e^{1+x^2}\,dx$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Cơ sở của phương pháp lấy nguyên hàm từng phần là định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì
> $$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Công thức trên gọi là *công thức lấy nguyên hàm từng phần* (gọi tắt là *công thức nguyên hàm từng phần*) và được viết gọn dưới dạng

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Chứng minh

Ta cần chứng tỏ vế phải là một nguyên hàm của uv'. Thật vậy

$$\left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right)' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - \left(\int v(x)u'(x)dx\right)'$$

$$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).$$ □

Ví dụ 5. Tìm $\int x\cos x\,dx$.

Giải

Đặt $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$. Khi đó $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$ (chỉ cần lấy một nguyên hàm của v'). Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Ví dụ 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \ln x$.

Giải

Đặt $u = u(x) = \ln x$, $dv = dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x}dx$, $v = v(x) = x$. Theo công thức nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

H3 *Tìm nguyên hàm của hàm số* $f(x) = \frac{x}{3}e^{2x}$.

(Hướng dẫn. Đặt $u(x) = \frac{x}{3}$, $v'(x) = e^{2x}$).

Câu hỏi và bài tập

5. Dùng phương pháp đổi biến số, tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \dfrac{9x^2}{\sqrt{1 - x^3}}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 - x^3$) ;

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x + 4}}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 5x + 4$) ;

c) $f(x) = x\sqrt[4]{1 - x^2}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 - x^2$) ;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$ (*Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 + \sqrt{x}$).

6. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = x\sin\dfrac{x}{2}$;

b) $f(x) = x^2\cos x$;

c) $f(x) = xe^x$;

d) $f(x) = x^3\ln(2x)$.

Luyện tập

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

7. a) $f(x) = 3x\sqrt{7 - 3x^2}$;

b) $f(x) = \cos(3x + 4)$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(3x + 2)}$;

d) $f(x) = \sin^5\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$.

8. a) $f(x) = x^2\left(\dfrac{x^3}{18} - 1\right)^5$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = x^3e^x$;

d) $f(x) = e^{\sqrt{3x-9}}$.

9. a) $f(x) = x^2 \cos 2x$;   b) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$;

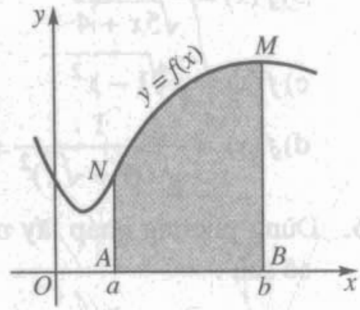
c) $f(x) = \sin^4 x \cos x$;   d) $f(x) = x \cos(x^2)$.

§ 3 TÍCH PHÂN

1. Hai bài toán dẫn đến khái niệm tích phân

a) Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là *hình thang cong* (phần tô đậm trong hình 3.1).



Hình 3.1

Bài toán đặt ra là tìm công thức tính diện tích của hình thang cong.

Bài toán 1

Cho hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Giả sử f là hàm số liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Chứng minh rằng diện tích S của hình thang cong đó là

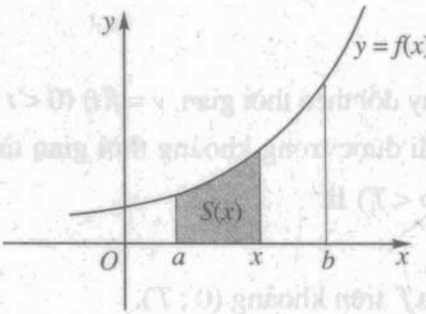
$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

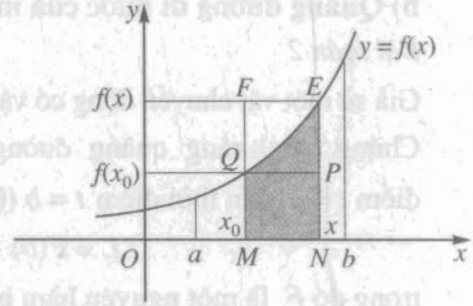
Chứng minh

Kí hiệu $S(x)$ $(a \le x \le b)$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$ và đường thẳng đi qua điểm x trên trục hoành và vuông góc với trục hoành (h.3.2). Như vậy, ta có một hàm số $y = S(x)$ xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Trước hết, ta chứng minh $y = S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Thật vậy, giả sử x_0 là một điểm tuỳ ý cố định thuộc khoảng $(a\,;\,b)$. Xét điểm $x \in (x_0\,;\,b]$. Khi đó $S(x) - S(x_0)$ là diện tích hình thang cong $MNEQ$ (h.3.3).



Hình 3.2



Hình 3.3

Do f là hàm đồng biến nên hình thang cong $MNEQ$ nằm trong hình chữ nhật $MNEF$ và chứa hình chữ nhật $MNPQ$. Vậy

$$S_{MNPQ} < S_{MNEQ} < S_{MNEF}$$

tức là $\quad f(x_0)(x - x_0) < S(x) - S(x_0) < f(x)(x - x_0),$

suy ra $\quad f(x_0) < \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} < f(x). \quad (1)$

Vì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ nên từ (1) người ta chứng minh được

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Tương tự với $x \in [a\,;\,x_0)$, ta cũng có $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ hay $S'(x_0) = f(x_0)$.

Vì x_0 là tuỳ ý thuộc $(a\,;b)$, nên suy ra $S'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a\,;b)$. Tương tự, ta có : $S'(a) = f(a), S'(b) = f(b)$. Vậy hàm số $y = S(x)$ là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a\,;\,b]$. Thành thử tồn tại hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$.

Dễ thấy $S = S(b) - S(a)$.

Do đó $S = S(b) - S(a) = \big(F(b) + C\big) - \big(F(a) + C\big) = F(b) - F(a)$. □

H1 *Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$.*

b) Quãng đường đi được của một vật

Bài toán 2

Giả sử một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)$ $(0 < t < T)$. Chứng minh rằng quãng đường L vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ $(0 < a < b < T)$ là

$$L = F(b) - F(a),$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên khoảng $(0 ; T)$.

Chứng minh

Gọi $s = s(t)$ là quãng đường đi được của vật cho đến thời điểm t. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ là $L = s(b) - s(a)$. Mặt khác, ta đã biết $s'(t) = f(t)$, do đó $s = s(t)$ là một nguyên hàm của f. Thành thử, tồn tại hằng số C sao cho $s(t) = F(t) + C$. Vậy

$$L = s(b) - s(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$ □

2. Khái niệm tích phân

Trong khoa học và kĩ thuật, có nhiều đại lượng quan trọng được biểu thị bằng hiệu $F(b) - F(a)$ trong đó F là một nguyên hàm của hàm số f nào đó.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là **tích phân của f từ a đến b** và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Trong trường hợp $a < b$, ta gọi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là *tích phân của f trên đoạn* $[a\,;\,b]$.

H2 *Chứng minh rằng $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là một số không phụ thuộc vào việc chọn nguyên hàm F nào trong họ các nguyên hàm của f.*

Người ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Như vậy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b .}$$

Vì $\int f(x)dx$ là một nguyên hàm bất kì của f nên ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_a^b .$$

Người ta gọi hai số a, b là hai *cận tích phân*, số a là *cận dưới*, số b là *cận trên*, f là *hàm số dưới dấu tích phân*, $f(x)\mathrm{d}x$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và x là *biến số lấy tích phân*.

CHÚ Ý

Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x. Chẳng hạn, nếu sử dụng chữ t, chữ u,... làm biến số lấy tích phân thì

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$, ... đều là một số và số đó bằng $F(b) - F(a)$.

Ví dụ 1. $\int_3^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left(\ln|x|\right)\Big|_3^5 = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$;

$$\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_2^4 = 6 + \ln 2.$$ □

Với định nghĩa tích phân, bài toán 1 có thể phát biểu lại như sau :

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tổng quát, người ta chứng minh được

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là
>
> $$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

H3 *Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian $v = f(t)$. Chứng minh rằng quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm a đến thời điểm b là* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ví dụ 2. Một ôtô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh (còn nói là "thắng"). Sau khi đạp phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

Giải. Lấy mốc thời gian là lúc ôtô bắt đầu được phanh. Gọi T là thời điểm ôtô dừng. Ta có $v(T) = 0$ suy ra $20 = 40T$ hay $T = 0{,}5$. Như vậy, khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn của ôtô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ôtô di chuyển được quãng đường là

$$L = \int_0^{0,5} (20 - 40t)\,\mathrm{d}t = (20t - 20t^2)\Big|_0^{0,5} = 5 \text{ (m)}.$$

3. Tính chất của tích phân

Các tính chất cơ bản của tích phân được phát biểu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

> Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có
>
> 1) $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;
>
> 2) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$;
>
> 3) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$;
>
> 4) $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
>
> 5) $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Ta chứng minh các tính chất 3) và 4).

Giả sử F là một nguyên hàm của f.

3) Ta có

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$

$$= F(c) - F(a) = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

4) Áp dụng định lí 2 của §1 ta có

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \left(\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$$

$$= \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

H4 *Hãy chứng minh các tính chất 1), 2) và 5).*

Ví dụ 3. Cho $\int_1^3 f(x)\,dx = -2$ và $\int_1^3 g(x)\,dx = 3$.

Hãy tính

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)]\,dx \quad \text{và} \quad \int_1^3 [5 - 4f(x)]\,dx.$$

Giải

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)]\,dx = 3\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx = 3.(-2) - 3 = -9.$$

$$\int_1^3 [5 - 4f(x)]\,dx = 5\int_1^3 dx - 4\int_1^3 f(x)\,dx = 5.2 - 4.(-2) = 18. \quad \square$$

H5 *Tìm b nếu biết rằng*

$$\int_0^b (2x - 4)\,dx = 0.$$

Câu hỏi và bài tập

10. Không tìm nguyên hàm, hãy tính các tích phân sau :

a) $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$; b) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$; c) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Hướng dẫn. Áp dụng định lí 1.

11. Cho biết $\int_1^2 f(x)\,dx = -4$, $\int_1^5 f(x)\,dx = 6$, $\int_1^5 g(x)\,dx = 8$. Hãy tính

a) $\int_2^5 f(x)\,dx$; b) $\int_1^2 3f(x)\,dx$;

c) $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$; d) $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

12. Cho biết $\int_0^3 f(z)\mathrm{d}z = 3$, $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 7$. Hãy tính $\int_3^4 f(t)\mathrm{d}t$.

13. a) Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

14. a) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$(s) đến thời điểm $t = \dfrac{3\pi}{4}$(s).

b) Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

15. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s^2). Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

16. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 25m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8m/s^2.

a) Sau bao lâu viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất ?

b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Bài đọc thêm

TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN VÀ KHÁI NIỆM TỔNG TÍCH PHÂN

1. Tính gần đúng tích phân

Từ định nghĩa tích phân ta thấy muốn tính tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ thì phải tìm được một nguyên hàm F của f. Mặc dù nguyên hàm này chắc chắn tồn tại nhưng trong nhiều trường hợp ta không thể tìm được biểu thức tường minh của $F(x)$ qua các hàm sơ cấp đã biết. (Chẳng hạn, người ta đã chứng minh rằng nguyên hàm của các hàm số $y = e^{-x^2}$, $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = \sqrt{1+x^4}$, ... không thể biểu diễn qua các hàm sơ cấp đã biết.). Trong những trường hợp như vậy, việc *tính đúng* tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là không thể thực hiện được. Vậy có thể tính gần đúng tích phân đó được không ?

a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Xét hình thang cong H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (trên hình 3.4, hàm số $f(x) = 5 - x^2$, $a = -1$, $b = 2$). Gọi S là diện tích của H.

Theo định lí 1 ta có $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

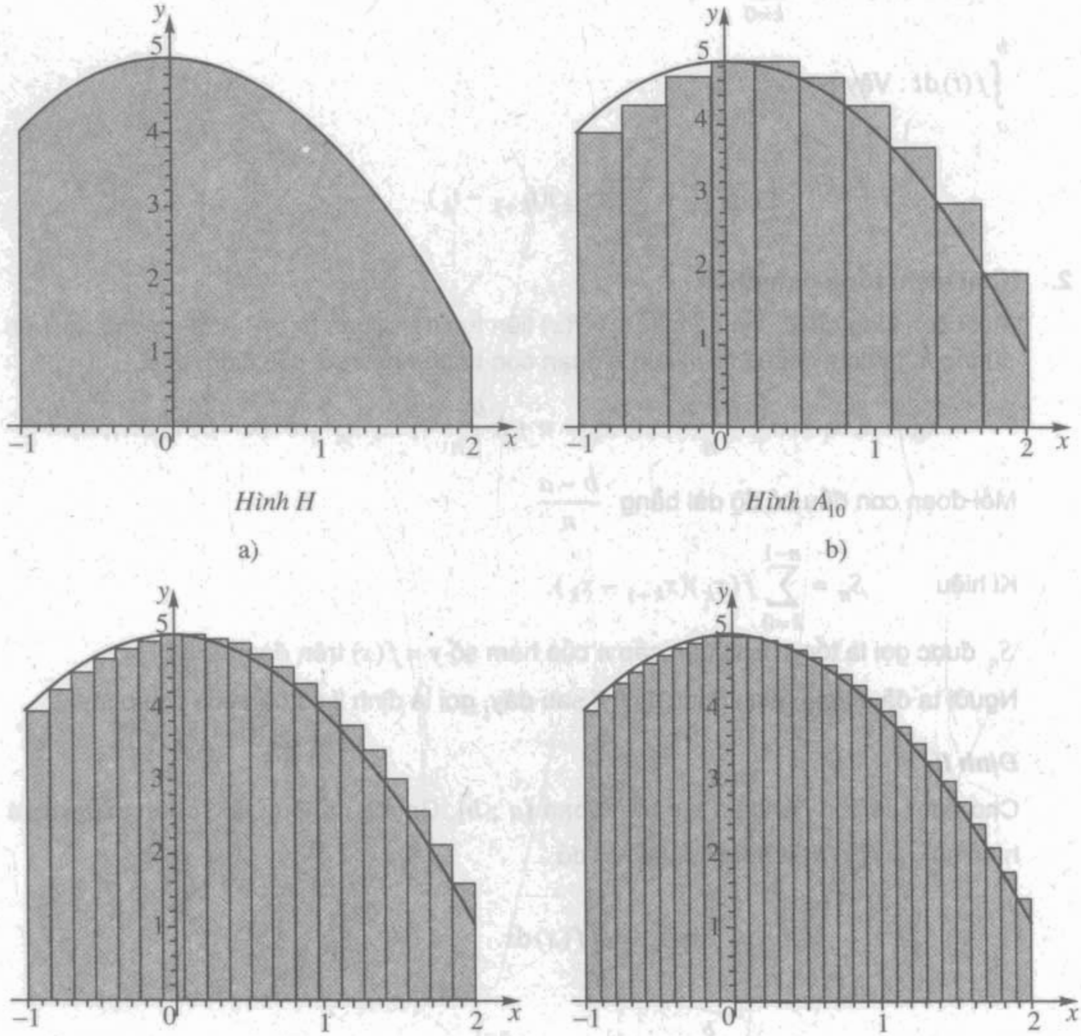
Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a; b]$ làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm $x_0 = a$, $x_1 = a + \dfrac{b-a}{n}, \ldots, x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Dựng các hình chữ nhật B_k với đáy là đoạn thẳng $[x_k ; x_{k+1}]$, chiều cao là $f(x_k)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Diện tích của hình chữ nhật B_k là $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Gọi A_n là hợp của n hình chữ nhật $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ (xem hình 3.4b với $n = 10$) và $S(A_n)$ là diện tích của hình A_n. Ta có $S(A_n)$ là tổng diện tích của n hình chữ nhật $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$.

Vậy $S(A_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$.

Khi số điểm chia n càng lớn, số hình chữ nhật $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ càng nhiều thì diện tích $S(A_n)$ của hình A_n càng gần với diện tích S của H (xem hình 3.4c với $n = 20$, hình 3.4d với $n = 30$). Vậy $S \approx S(A_n)$ nghĩa là

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$



Hình H a)

Hình A_{10} b)

Hình A_{20} c)

Hình A_{30} d)

Hình 3.4

b) Có thể nhận được công thức gần đúng trên với lập luận như sau : Giả sử một vật chuyển động với vận tốc $v = f(t)$. Ta chia khoảng thời gian [a; b] thành n khoảng thời gian bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Với n khá lớn thì khoảng thời gian $(t_k\,;\,t_{k+1})$ khá bé nên có thể coi rằng trong khoảng thời gian đó vật chuyển động với vận tốc không đổi. Khi đó, quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $(t_k\,;\,t_{k+1})$ xấp xỉ

bằng $f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$. Thành thử quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $[a ; b]$ xấp xỉ bằng $\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$. Mặt khác, ta đã biết quãng đường đi được là $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Vậy ta có

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k).$$

2. Khái niệm tổng tích phân

Một cách tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a ; b]$ làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ldots,\ x_n = b\ \ (k = 0, 1, 2\ldots, n).$$

Mỗi đoạn con đều có độ dài bằng $\frac{b-a}{n}$.

Kí hiệu $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$

S_n được gọi là tổng tích phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Người ta đã chứng minh được định lí sau đây, gọi là định lí cơ bản của tích phân

Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Gọi S_n là tổng tích phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Khi đó

$$\lim S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Thành thử khi n lớn ta có $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$

Như vậy tổng tích phân S_n dùng để tính xấp xỉ tích phân. Khi cấp n càng lớn thì tổng tích phân S_n càng gần với tích phân $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ và sự xấp xỉ càng tốt, độ chính xác càng cao.

Chú ý. Về mặt lịch sử, khái niệm tích phân được hình thành độc lập với khái niệm nguyên hàm. Tích phân của hàm số f trên đoạn $[a ; b]$ được định nghĩa là giới hạn

của tổng tích phân cấp n của f trên đoạn $[a; b]$. Đẳng thức $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, mà ta dùng làm định nghĩa tích phân, được tìm ra sau đó bởi hai nhà toán học Niu-tơn và Lai-bơ-nit. Đẳng thức đó cho ta mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và được gọi là công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit.

Em có biết

NGUỒN GỐC CỦA KÍ HIỆU NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Kí hiệu tích phân là do nhà toán học thiên tài người Đức Lai-bơ-nit (1646 – 1716) đưa ra. Tích phân của hàm số f trên đoạn $[a ; b]$ được ông định nghĩa là giới hạn của tổng tích phân.

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k). \qquad (1)$$

Thời Lai-bơ-nit, hiệu $x_{k+1} - x_k$ thường được viết là $dx_k = x_{k+1} - x_k$ do d là chữ đầu của chữ La-tinh "diferentia" (hiệu số). Do đó, giới hạn (1) được viết lại thành

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,dx_k.$$

Kí hiệu $\sum$ (tổng số) cũng như chữ S có nguồn gốc từ chữ La-tinh "summa" (có nghĩa là tổng số). Dấu tích phân $\int$ là một biến dạng đơn giản của chữ S.

Kí hiệu $\int_a^b f(x)\,dx$ muốn nói rằng đây là *giới hạn của tổng các số hạng* $f(x_k)\,dx_k$.

Thành thử, giới hạn (1) được kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Công thức $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$ với F là nguyên hàm tuỳ ý của f nêu lên mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và kí hiệu $\int f(x)\,dx$ được dùng để chỉ các nguyên hàm của f. Việc coi $\int f(x)\,dx$ là một nguyên hàm bất kì của f dẫn đến công thức trực quan và tiện lợi là $\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)dx \right)\Big|_a^b$. Người ta còn gọi $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân xác định và $\int f(x)dx$ là tích phân bất định (không xác định) của hàm f.

§ 4 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau đây.

$$\boxed{\int_a^b f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u, \qquad (1)}$$

trong đó hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, hàm số $y = f(u)$ liên tục và sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K ; a và b là hai số thuộc K.

Công thức (1) được chứng minh như sau :

Gọi F là nguyên hàm của f. Khi đó vế phải của (1) là $F\left[u(b)\right] - F\left[u(a)\right]$.

Theo định lí 1 §2, vế trái của (1) là

$$\left(F[u(x)]\right)\Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

Ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy (1) được chứng minh. □

Công thức (1) được gọi là *công thức đổi biến số*.

Phương pháp đổi biến số thường được áp dụng theo hai cách sau đây.

Cách 1. Giả sử ta cần tính $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f[u(x)]u'(x)$, thì theo công thức (1) ta có

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$. Trong nhiều trường hợp việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Ví dụ 1. Tính $\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có $x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$. Đặt $u = x^2$ ta có $u(1) = 1$, $u(2) = 4$. Do đó

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{\mathrm{e}^u}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}).$$

H1 *Tính* $\int_1^3 \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$ *bằng cách đặt* $u = 2x+3$.

Cách 2. Giả sử ta cần tính $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $x = x(t)$ $(t \in K)$ và $a, b \in K$ thoả mãn $\alpha = x(a)$, $\beta = x(b)$ thì công thức (1) cho ta

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[x(t)]x'(t)\mathrm{d}t.$$

Vậy bài toán quy về tính $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ (ở đó $g(t) = f[x(t)].x'(t)$). Trong nhiều trường hợp, việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Ví dụ 2. Tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Giải

Đặt $x = \sin t$. Ta có $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t$, $0 = \sin 0$ và $1 = \sin\frac{\pi}{2}$.

Vậy $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\,\mathrm{d}t.$

Vì $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Do đó

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

H2 *Tính* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ *bằng cách đặt* $x = \sin t$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Tương tự như phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, ta cũng có phương pháp tích phân từng phần. Cơ sở của phương pháp này là công thức sau đây.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (2)$$

trong đó các hàm số u, v có đạo hàm liên tục trên K và a, b là hai số thuộc K.

Thật vậy, theo định lí 2 §2, ta có

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b = \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$$

$$= \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \left(\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Công thức (2) gọi là *công thức tích phân từng phần* và còn được viết dưới dạng $\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \left(uv\right)\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$.

Ví dụ 3. Tính $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Giải. Chọn $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Khi đó $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^x$. Do đó

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left(x\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

Ví dụ 4. Tính $\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Giải. Chọn $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x$. Khi đó $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Do đó

$$\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

H3 *Tính* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Câu hỏi và bài tập

17. Dùng phương pháp đổi biến số tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$; c) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$;

d) $\int_0^1 \frac{5x}{(x^2+4)^2}dx$; e) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 3x)\sin 3x\,dx$.

18. Dùng phương pháp tích phân từng phần để tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x^5 \ln x\,dx$; b) $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$;

c) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

Luyện tập

19. Tính a) $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}(2+5t^4)\,dt$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\,dx$.

20. Tính a) $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{\frac{1}{4}}\sin t\,dt$; b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

21. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Khi đó $\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}dx$ là

(A) $F(3) - F(1)$; (B) $F(6) - F(2)$;

(C) $F(4) - F(2)$; (D) $F(6) - F(4)$.

22. Chứng minh rằng

a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx$; b) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 [f(x)+f(-x)]dx$.

23. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 3$. Tính $\int_{-1}^0 f(x)dx$ trong các trường hợp sau :

a) f là hàm số lẻ.; b) f là hàm số chẵn.

24. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$; b) $\int_1^3 \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx$;

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\, dx$; d) $\int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$.

25. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$; b) $\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$; d) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$; e) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$.

§ 5 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Trong thực tiễn cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật, người ta cần phải tính diện tích của những hình phẳng cũng như thể tích của những vật thể phức tạp. Chẳng hạn :

Khi xây dựng một nhà máy thuỷ điện, để tính lưu lượng của dòng sông ta phải tính diện tích thiết diện ngang của dòng sông. Thiết diện đó thường là một hình khá phức tạp.

Khi đóng tàu, các kĩ sư cần xác định thể tích của khoang tàu có hình dạng đặc biệt.

Trước khi phép tính tích phân ra đời, với mỗi hình và mỗi vật thể như vậy người ta lại phải nghĩ ra một cách để tính. Sự ra đời của tích phân cho chúng ta một phương pháp tổng quát để giải hàng loạt những bài toán tính diện tích và thể tích nói trên.

Trong §5 ta nói về ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng và trong §6 nói về ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.

Trong định lí 1 §3, ta đã biết : Nếu $y = f(x)$ là một hàm liên tục và lấy giá trị không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

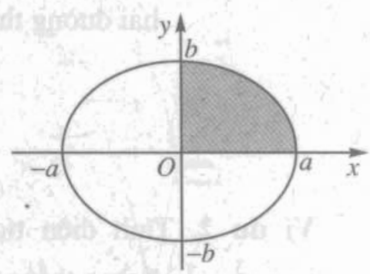
Việc tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong thường được quy về tính diện tích của hình thang cong bằng cách chia hình phẳng đó thành một số hình thang cong.

Ví dụ 1 (*Diện tích hình elip*). Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0).$$

Giải

Ta tính diện tích S của một phần tư hình elip nằm trong góc phần tư thứ nhất. Đó là một hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ (h.3.5).



Hình 3.5

Vậy $S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Ta tính tích phân trên bằng phương pháp đổi biến số.

Đặt $x = a\sin t$. Ta có

$$dx = d(a\sin t) = a\cos t\,dt,\ 0 = a\sin 0 \text{ và } a = a\sin\frac{\pi}{2}.$$

Do đó

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t}.a\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt$$

(vì $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$).

Suy ra $S = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$

Vậy diện tích hình elip là $4S = \pi ab$.

- Một cách tổng quát, ta có

> Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (1)}$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, đường thẳng $x = 2$, trục tung và trục hoành.

Giải. (h.3.6) Đặt $f(x) = x^3 - 1$.

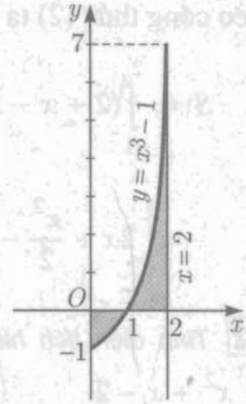
Ta thấy $f(x) \le 0$ trên $[0 ; 1]$ và $f(x) \ge 0$ trên $[1 ; 2]$.

Theo công thức (1), diện tích S của hình đang xét là

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| \, dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x^3) \, dx + \int_1^2 (x^3 - 1) \, dx$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2}.$$

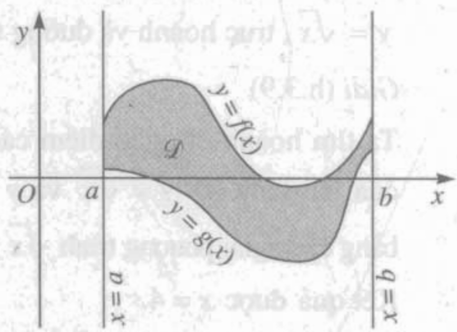


Hình 3.6

H1 *Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành.*

• Để tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (h.3.7), ta có công thức sau :

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx. \qquad (2)}$$



Hình 3.7

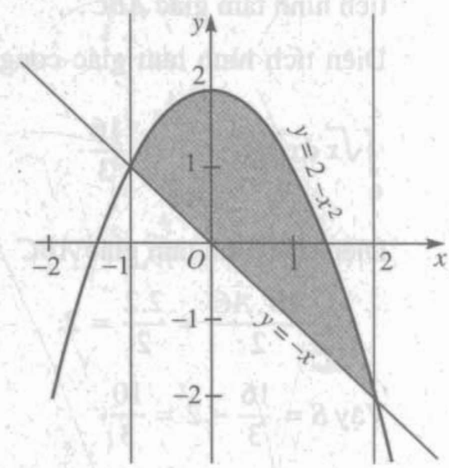
Ví dụ 3. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$.

Giải (h.3.8)

Trước hết, ta tìm hoành độ giao điểm các đồ thị của hai hàm số đã cho bằng cách giải phương trình $2 - x^2 = -x$. Ta có

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x = -1 \text{ và } x = 2.$$

Hình phẳng đang xét giới hạn bởi các đồ thị của hai hàm số $y = 2 - x^2$, $y = -x$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.



Hình 3.8

Theo công thức (2) ta có

$$S = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

H2 *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 2$ và parabol $y = x^2 + x - 2$.*

• Để tính diện tích một số hình phẳng phức tạp hơn ta phải chia hình đã cho thành một số hình đơn giản mà ta đã biết cách tính diện tính.

Ví dụ 4. Tính diện tích S của hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$.

Giải (h.3.9)

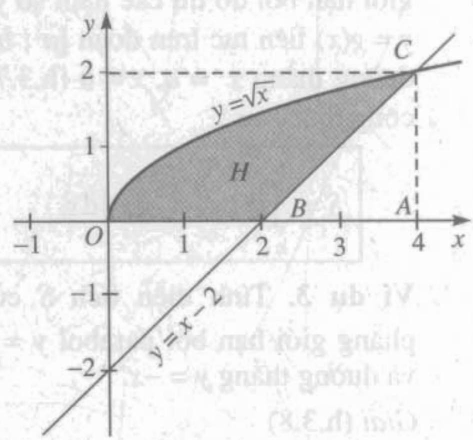
Ta tìm hoành độ giao điểm các đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$ bằng cách giải phương trình $\sqrt{x} = x - 2$.

Kết quả được $x = 4$.

Diện tích S của hình H bằng diện tích hình tam giác cong OCA trừ đi diện tích hình tam giác ABC.

Diện tích hình tam giác cong OCA là

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}.$$



Hình 3.9

Diện tích hình tam giác ABC là

$$\frac{AB.AC}{2} = \frac{2.2}{2} = 2.$$

Vậy $S = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$.

CHÚ Ý

Tương tự (bằng cách coi x là hàm của biến y), diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ (g và h là hai hàm liên tục trên đoạn $[c\ ;\ d]$) và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ là

$$\boxed{S = \int_c^d |g(y) - h(y)|\,\mathrm{d}y. \qquad (3)}$$

Chẳng hạn trong ví dụ 4, coi hình H là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^2$, đường thẳng $x = y + 2$, trục hoành $y = 0$ và đường thẳng $y = 2$. Do đó, ta có thể tính ngay S theo công thức (3) như sau :

$$S = \int_0^2 (y + 2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{10}{3}.$$

Câu hỏi và bài tập

26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{7\pi}{6}$.

27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$.

28. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -3$, $x = -2$;

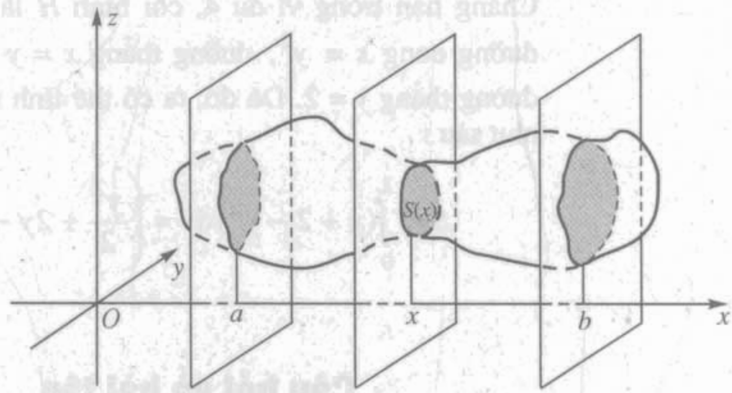
b) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 2x$;

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$.

§ 6 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

1. Tính thể tích của vật thể

Cho một vật thể trong không gian toạ độ $Oxyz$. Gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b.



Hình 3.10

Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$ (h.3.10).

Giả sử $S = S(x)$ là một hàm số liên tục. Người ta chứng minh được rằng thể tích V của B là

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)}$$

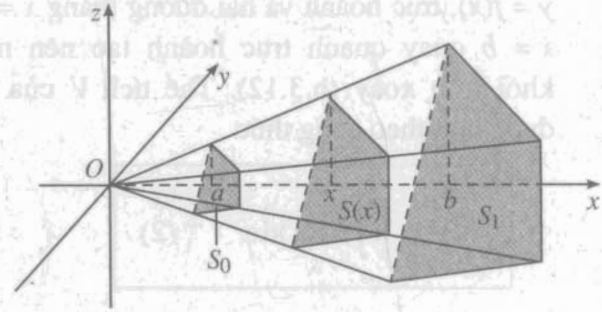
Sử dụng công thức (1) ta tìm được công thức tính thể tích của một số vật thể quen thuộc trong hình học.

Ví dụ 1 (*Thể tích khối chóp cụt*). Cho khối chóp cụt có chiều cao h, diện tích đáy nhỏ và đáy lớn thứ tự là S_0, S_1. Chứng minh rằng thể tích V của nó là

$$V = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1).$$

Giải

Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, ta đặt khối chóp (sinh ra khối chóp cụt) sao cho đường cao nằm trên trục Ox và đỉnh trùng với gốc toạ độ.



Hình 3.11

Gọi a và b lần lượt là khoảng cách từ O đến đáy nhỏ và đáy lớn, ta có chiều cao của khối chóp cụt là $h = b - a$ (h.3.11). Thiết diện của khối chóp cụt cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$ là một đa giác đồng dạng với đáy lớn với tỉ số đồng dạng là $\dfrac{x}{b}$.

Ta có $\dfrac{S(x)}{S_1} = \dfrac{x^2}{b^2}$. Vậy $S(x) = S_1 \, \dfrac{x^2}{b^2}$.

Theo công thức (1), ta có

$$V = \int_a^b S_1 \frac{x^2}{b^2} \mathrm{d}x = \frac{S_1(b^3 - a^3)}{3b^2} = \frac{b-a}{3} \cdot \frac{S_1a^2 + S_1ab + S_1b^2}{b^2}$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{S_1a^2}{b^2} + \frac{S_1a}{b} + S_1\right).$$

Để ý rằng $S_0 = S(a) = \dfrac{S_1a^2}{b^2}$ và $\dfrac{S_1a}{b} = \sqrt{S_1 \dfrac{S_1a^2}{b^2}} = \sqrt{S_1S_0}$ nên $V = \dfrac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0S_1} + S_1)$.

Nhận xét. Khối chóp được coi là khối chóp cụt có $S_0 = 0$. Vì vậy, thể tích V của khối chóp có chiều cao h và diện tích đáy S là

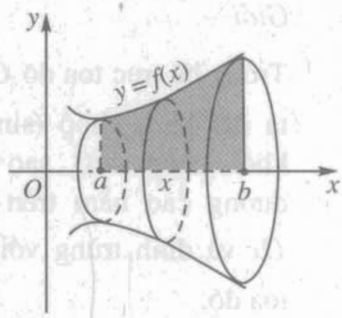
$$V = \frac{Sh}{3}.$$

2. Thể tích khối tròn xoay

Một hình phẳng quay xung quanh một trục nào đó tạo nên một *khối tròn xoay.*

• Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay (h.3.12). Thể tích V của nó được tính theo công thức

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)}$$



Hình 3.12

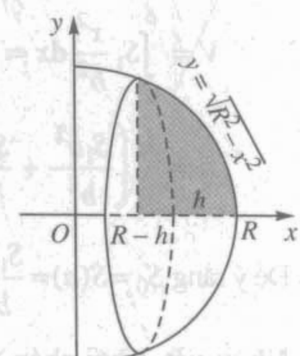
Thật vậy, thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ là một hình tròn bán kính $f(x)$. Do đó $S(x) = \pi f^2(x)$. Vì thế, từ công thức (1) ta suy ra công thức (2).

Ví dụ 2 (*Thể tích khối chỏm cầu*). Cho một khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao h. Chứng minh rằng thể tích V của khối chỏm cầu là

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Giải

Trong mặt phẳng Oxy, xét hình phẳng giới hạn bởi cung tròn tâm O bán kính R có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và đường thẳng $x = R - h$ $(0 < h \le R)$. Quay hình phẳng đó quanh trục hoành ta thu được khối chỏm cầu bán kính R chiều cao h (h.3.13).



Hình 3.13

Theo công thức (2) thể tích của khối chỏm cầu là

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$$

$$= \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3}\right] = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Nhận xét

Khối bán cầu bán kính R được coi là khối chỏm cầu bán kính R và chiều cao $h = R$. Vì vậy, thể tích của khối bán cầu bán kính R là

$$V = \pi R^2\left(R - \frac{R}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

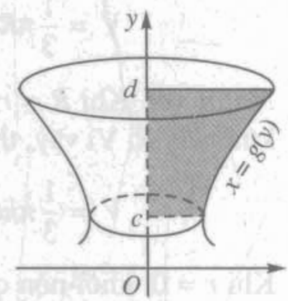
Do đó, thể tích hình cầu bán kính R là

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

H *Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục hoành.*

• Tương tự, cho đường cong có phương trình $x = g(y)$, trong đó g là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[c\ ;\ d]$. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$, quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay (h.3.14). Thể tích V của nó được tính theo công thức

$$\boxed{V = \pi\int_c^d g^2(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (3)}$$



Hình 3.14

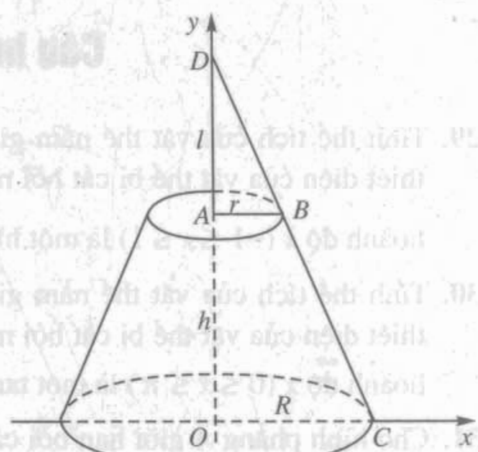
Thật vậy, từ công thức (2) bằng cách xem x là hàm của biến y ta suy ra công thức (3). □

Ví dụ 3 (*Thể tích khối nón cụt*). Cho khối nón cụt có chiều cao h, bán kính đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là R và r. Chứng minh rằng thể tích V của khối nón cụt đó là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Giải

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét hình thang vuông $OABC$ với $OA = h$, $AB = r$ và $OC = R$ (h.3.15). Quay hình thang đó quanh trục Oy ta được khối nón cụt đã cho.



Hình 3.15

Giả sử BC kéo dài cắt Oy tại D. Đặt $AD = l$, $OD = a$. Ta có $a - l = h$. Phương trình đường thẳng BC là $x = \dfrac{R(a-y)}{a}$. Theo công thức (3) ta có

$$V = \pi\int_0^h \frac{R^2(a-y)^2}{a^2}dy = \frac{\pi R^2}{3a^2}(a^3 - l^3)$$

$$= \frac{\pi R^2}{3a^2}(a-l)(a^2 + al + l^2) = \frac{\pi R^2 h}{3}\left[1 + \frac{l}{a} + \left(\frac{l}{a}\right)^2\right].$$

Vì $\dfrac{l}{a} = \dfrac{r}{R}$ nên khi thay $\dfrac{l}{a}$ bởi $\dfrac{r}{R}$ ta được

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\left[1 + \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$ □

Nhận xét. Khi $R = r$, khối nón cụt trở thành khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy R. Vì vậy, thể tích của khối trụ là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R^2 + R^2) = \pi R^2 h.$$

Khi $r = 0$, khối nón cụt trở thành khối nón có chiều cao h và bán kính đáy R. Vì vậy, thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Câu hỏi và bài tập

29. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1 - x^2}$.

30. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

31. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 4$ và $y = \sqrt{x} - 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

32. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \dfrac{2}{y}$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

33. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{5}\,y^2$, $x = 0$, $y = -1$ và $y = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

1. AI LÀ NGƯỜI PHÁT MINH RA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN ?

Cùng với phép tính vi phân, phép tính tích phân là một thành tựu lớn của trí tuệ nhân loại. Nó đã tạo nên một bước ngoặt lớn trong sự phát triển của khoa học và trở thành một công cụ sắc bén, đầy sức mạnh được các nhà khoa học sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu cũng như trong ứng dụng thực tiễn.

Phép tính vi phân và tích phân do hai nhà bác học lớn là Niu-tơn (I. Newton 1643 – 1727), người Anh và Lai-bơ-nit (G. Leibniz 1646 – 1716), người Đức, sáng tạo ra đồng thời và độc lập với nhau.

Thực ra đây là một cuộc chạy tiếp sức của nhiều thế hệ các nhà bác học xuất sắc trong nhiều thế kỉ. Trước Niu-tơn và Lai-bơ-nit hai nghìn năm, nhà bác học Ác-si-mét đã có ý tưởng đầu tiên về phép tính tích phân. Trong bức thư gửi người bạn, ông đã đưa ra một phương pháp mới gọi là "phương pháp vét cạn" và đã sử dụng nó để giải nhiều bài toán tính diện tích, thể tích, chiều dài cung. Đó là tiền thân của phép tính tích phân. Sau ông nhiều nhà toán học khác cũng tham gia mở đường cho sự ra đời của tích phân, trong đó phải kể đến những đóng góp xuất sắc của các nhà khoa học như J. Kê-ple (J. Kepler), Ca-va-li-ơ-ri (B. Cavalieri), Phéc-ma, Đề-các, Ba-râu (I. Barrow).

Ngày nay các nhà nghiên cứu đều nhất trí rằng về mặt thời gian, Niu-tơn khám phá ra phép vi tính vi - tích phân trước Lai-bơ-nit khoảng 10 năm nhưng Lai-bơ-nit lại cho công bố công khai công trình của mình trước Niu-tơn tới ba năm. Về hình thức, phép tính tích phân của Niu-tơn và phép tính tích phân của Lai-bơ-nit khác nhau rõ rệt. Niu- tơn trình bày các kết quả của mình dưới ngôn ngữ Hình học, còn Lai-bơ-nit dùng ngôn ngữ Đại số. Các kí hiệu của Lai-bơ-nit phong phú và thuận tiện hơn nhiều so với các kí hiệu của Niu-tơn (dấu tích phân và các kí hiệu vi phân, đạo hàm mà chúng ta dùng ngày nay là của Lai-bơ-nit). Về sự kết hợp giữa phép tính vi – tích phân với các nghiên cứu về khoa học tự nhiên thì Lai-bơ-nit không sâu sắc bằng Niu-tơn nhưng đứng trên góc độ toán học thì phép tính vi - tích phân của Lai-bơ-nit thể hiện một tầm nhìn bao quát hơn, một trí tưởng tượng tinh tế hơn.

2. VÀI NÉT VỀ CUỘC ĐỜI VÀ SỰ NGHIỆP CỦA NIU-TƠN VÀ LAI-BƠ-NIT

1) Niu-tơn (1643 – 1727) là nhà toán học, vật lí học, cơ học và thiên văn học vĩ đại người Anh. Ông sinh ra ở một vùng quê ở nước Anh. Người cha qua đời trước khi ông ra đời. Người mẹ vì quá đau buồn nên sinh ông thiếu tháng. Lúc mới sinh ông bé tới mức đặt được vào một chiếc cốc to. Không ai ngờ rằng đứa bé quặt quẹo như vậy lại có thể thọ tới 85 tuổi và trở thành một nhà khoa học vĩ đại như vậy.

Isaac Newton
(1643 – 1727)

Niu-tơn được người đương thời mô tả là có tầm vóc trung bình, béo chắc, đầu luôn đội tóc giả, có đôi mắt sáng và thông minh. Ông sống rất giản dị, khiêm nhường, say mê với công việc và rất đãng trí.

2) Lai-bơ-nit (1646 – 1716) là nhà toán học, vật lí học, triết học thiên tài người Đức. Ông sinh ở thành phố Lai-xích (Leipzig), là con trai một giáo sư triết học. Từ lúc 6 tuổi ông đã suốt ngày mê mải đọc sách. Năm ông 7 tuổi thì cha ông qua đời. Năm 15 tuổi ông đã vào đại học và học về luật học, triết học và toán học. Năm 20 tuổi (năm 1666) ông đã bảo vệ luận án tiến sĩ luật học đồng thời cũng công bố công trình toán học đầu tiên của mình với nhan đề : "Những suy nghĩ về nghệ thuật tổ hợp". Sau đó ông được bổ nhiệm làm quan chức ngoại giao tại Pháp.

Gottfried Leibniz
(1646 – 1716)

Những cống hiến về toán học chỉ là một phần nhỏ trong sự nghiệp của ông. Ở thời đại ông, người ta biết đến ông như một nhà ngoại giao, nhà luật học và nhà triết học. Ông biết rất nhiều ngoại ngữ và hầu hết các kiến thức của ông đều có được bằng con đường tự học.

Lai-bơ-nit được người đương thời mô tả là có thể trạng gày gò, tầm thước, da xanh và cũng luôn đeo tóc giả. Trí nhớ của ông cũng khác người thường : Những điều khó hiểu được ông nhớ rất tốt nhưng những điều dễ hiểu thì ông lại quên ngay.

Luyện tập

34. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = x$, $y = 1$ và $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$, trục tung và đường thẳng $x = 1$;

c) Đồ thị các hàm số $y = x^2$, $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$.

35. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 1$ và $y = 3 - x$;

b) Các đường $x = y^3$, $y = 1$ và $x = 8$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ và trục hoành.

36. Tính thể tích của vật thể T nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq \pi)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

37. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

38. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{4}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

39. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành.

40. Cho hình phẳng B giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{2\sin 2y}$, $x = 0$, $y = 0$ và $y = \dfrac{\pi}{2}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình B quanh trục tung.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau (từ bài 41 đến bài 43) :

41. a) $y = 2x(1 - x^{-3})$;

b) $y = 8x - \dfrac{2}{x^{\frac{1}{4}}}$;

c) $y = x^{\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{3}{2}} + 1)$;

d) $y = \dfrac{\sin(2x + 1)}{\cos^2(2x + 1)}$.

42. a) $y = \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$;

b) $y = x^3(1 + x^4)^3$;

c) $y = \dfrac{xe^{2x}}{3}$;

d) $y = x^2e^x$.

43. a) $y = xe^{-x}$; b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

44. Tìm hàm số $y = f(x)$ nếu biết $dy = 12x(3x^2 - 1)^3 dx$ và $f(1) = 3$.

45. Xác định số b dương để tích phân $\int_0^b (x - x^2)dx$ có giá trị lớn nhất.

46. Cho biết $\int_1^9 f(x)dx = -1$, $\int_7^9 f(x)dx = 5$, $\int_7^9 g(x)dx = 4$. Hãy tìm

a) $\int_1^9 -2f(x)dx$; b) $\int_7^9 [f(x) + g(x)]dx$;

c) $\int_7^9 [2f(x) - 3g(x)]dx$; d) $\int_1^7 f(x)dx$.

47. Cho hàm số f liên tục trên $[a ; b]$. Tỉ số

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

được gọi là *giá trị trung bình của hàm số f trên* $[a ; b]$ và được kí hiệu là $m(f)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in [a ; b]$ sao cho $m(f) = f(c)$.

48. Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0$ (s) chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5 - t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

49. Một chất điểm A xuất phát từ vị trí O, chuyển động thẳng nhanh dần đều ; 8 giây sau nó đạt đến vận tốc 6m/s. Từ thời điểm đó nó chuyển động thẳng đều. Một chất điểm B xuất phát từ cùng vị trí O nhưng chậm hơn 12 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều. Biết rằng B đuổi kịp A sau 8 giây (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A.

50. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x\,dx$; b) $\int_1^2 x(2x^2 + 1)dx$; c) $\int_2^3 (x - 1)e^{x^2 - 2x}dx$.

51. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$;

b) Các đường cong có phương trình $x = 4 - 4y^2$ và $x = 1 - y^4$ trong miền $x \geq 0$.

52. Tính diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Parabol $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến của nó tại điểm $M(3 ; 5)$ và trục tung ;

b) Parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ và các tiếp tuyến của nó tại các điểm $A(0 ; -3)$ và $B(3 ; 0)$.

53. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$ là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5}\,x^2$.

54. Xét hình phẳng giới hạn bởi đường hypebol $y = \dfrac{2}{x}$ và các đường thẳng $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục tung.

55. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\cos x}\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ và hai trục toạ độ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A quanh trục hoành.

56. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $x(y + 1) = 2$ và các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay A quanh trục tung.

57. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $x - y^2 = 0$ và các đường thẳng $y = 2$, $x = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A

a) Quanh trục hoành ;　　　　b) Quanh trục tung.

58. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A quanh trục hoành.

59. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đường cong có phương trình $y^2 = x^3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$ trong miền $y \ge 0$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay A

a) Quanh trục hoành ;　　　　b) Quanh trục tung.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

60. Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$. Giá trị của c là

(A) 9 ; (B) 3 ; (C) 81 ; (D) 8.

61. Giá trị của $\int_0^2 2e^{2x}dx$ là

(A) e^4 ; (B) $e^4 - 1$; (C) $4e^4$; (D) $3e^4 - 1$.

62. Giá trị của $\int_{-1}^0 x^2(x+1)^3dx$ là

(A) $-\frac{7}{70}$; (B) $-\frac{1}{60}$; (C) $\frac{2}{15}$; (D) $\frac{1}{60}$.

63. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi đường thẳng $y = 4x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là

(A) 4 ; (B) 5 ; (C) 3 ; (D) 3,5.

64. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi hai đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là

(A) 12 ; (B) 15,75 ; (C) 6,75 ; (D) 4 .

65. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = x^2$ là

(A) $\frac{4}{3}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $\frac{5}{3}$; (D) $\frac{23}{15}$.

66. Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 6 - |x|$. Thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay A xung quanh trục tung là

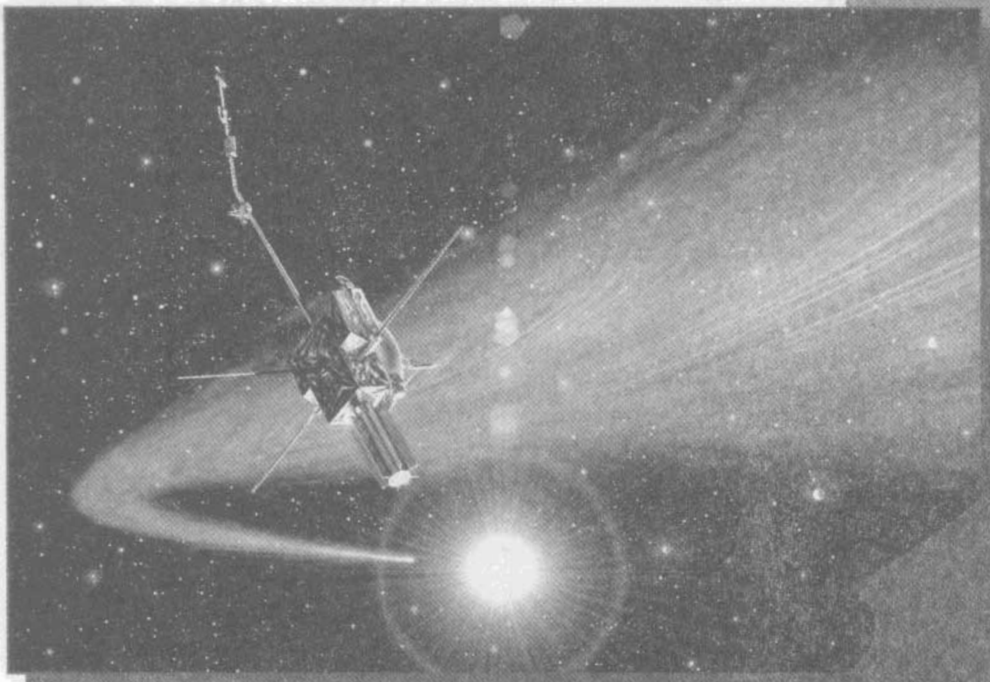
(A) $\dfrac{32\pi}{3}$; (B) 9π ; (C) 8π ; (D) $\dfrac{20\pi}{3}$.

67. Cho a, b là hai số dương. Gọi K là hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ hai, giới hạn bởi parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = -bx$. Thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay K xung quanh trục hoành là một số không phụ thuộc vào giá trị của a và b nếu a và b thoả mãn điều kiện sau

(A) $b^4 = 2a^5$; (B) $b^3 = 2a^5$; (C) $b^5 = 2a^3$; (D) $b^4 = 2a^2$.

Chương IV

SỐ PHỨC



Chương này cho ta biết tập hợp **số phức**, một tập hợp số chứa tập hợp số thực, với các quy tắc tính toán tương tự, trong đó mọi số thực âm đều có căn bậc hai, mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm. Ta còn biết nhiều ứng dụng khác của số phức trong đại số, trong hình học và trong lượng giác.

Học sinh cần rèn luyện kĩ năng tính toán với số phức, hiểu ý nghĩa của việc xây dựng tập hợp số phức và giải được một số bài tập đơn giản về số phức.

§ 1 SỐ PHỨC

1. Khái niệm số phức

Ta đã biết rằng các phương trình $x^2 + 1 = 0, x^2 + 4 = 0$ không có nghiệm thực. Một cách tổng quát các phương trình bậc hai với hệ số thực $Ax^2 + Bx + C = 0$ mà biệt thức $\Delta < 0$, chẳng hạn $x^2 - 2x + 2 = 0$ (biệt thức $\Delta = -4$), đều không có nghiệm thực.

Sự phát triển của toán học, khoa học đòi hỏi phải mở rộng tập hợp các số thực thành một tập hợp số mới gọi là tập hợp các số phức, trong đó có các phép toán cộng và nhân với các tính chất tương tự phép toán cộng và nhân số thực sao cho các phương trình nói trên đều có nghiệm.

Muốn thế, người ta đưa ra số i sao cho bình phương của nó bằng -1. Khi đó i là một nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ và $2i$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + 4 = 0$; còn $1 + i$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 2 = 0$, tức là phương trình $(x - 1)^2 + 1 = 0$,... Các số $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) gọi là các số phức.

Với các số phức, người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc 2, 3, 4, ... đều có nghiệm (phức). Số phức cũng liên quan chặt chẽ với hình học phẳng, với lượng giác , ... (xem bài Em có biết "Vài nét lịch sử phát triển số phức", trang 197).

ĐỊNH NGHĨA 1

> Một **số phức** là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thoả mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.
>
> i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực* và b được gọi là *phần ảo* của số phức $z = a + bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

CHÚ Ý

Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $a + 0i = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là số thuần ảo) : $z = 0 + bi = bi$ $(b \in \mathbb{R})$; $i = 0 + 1i = 1i$.

Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Ví dụ 1

Số phức $z = 2 + \sqrt{3}i$ có phần thực bằng 2, phần ảo bằng $\sqrt{3}$.

Số phức $z = -i$ (tức là $(-1)i$) có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -1 ; đó là một số ảo.

ĐỊNH NGHĨA 2

> **Hai số phức** $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i$ $(a', b' \in \mathbb{R})$ gọi là **bằng nhau** nếu
>
> $$a = a',\ b = b'.$$
>
> Khi đó ta viết $z = z'$.

H1 *Khi nào số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ bằng 0 ?*

2. Biểu diễn hình học số phức

Ta đã biết biểu diễn hình học các số thực bởi các điểm trên một trục số.

Đối với các số phức, ta hãy xét mặt phẳng toạ độ *Oxy*. Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M có toạ độ $(a ; b)$. Ngược lại, rõ ràng mỗi điểm $M(a ; b)$ biểu diễn một số phức là $z = a + bi$. Ta còn viết $M(a + bi)$ hay $M(z)$.

Vì lẽ đó, mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức như thế được gọi là *mặt phẳng phức*.

Gốc toạ độ O biểu diễn số 0.

Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox còn được gọi là *trục thực*.

Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy còn được gọi là *trục ảo*.

Trên hình 4.1 có các điểm O, A, B, C, D, E, F theo thứ tự biểu diễn các số phức $0, 1, i, -2, -2i, 1+2i, 2-i$.

Hình 4.1

3. Phép cộng và phép trừ số phức

a) Tổng của hai số phức

ĐỊNH NGHĨA 3

> **Tổng của hai số phức** $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức
> $$z + z' = a + a' + (b + b')i.$$

Như vậy, để cộng hai số phức, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Ví dụ 2. Ta có $(3 + i) + (2 - 3i) = 5 - 2i$;

$(1 - 2i) + (2 + 2i) = 3$;

$(2 - 2i) + (-2 + 3i) = i$.

b) Tính chất của phép cộng số phức

Từ định nghĩa 3, dễ thấy phép cộng các số phức có các tính chất sau đây, tương tự phép cộng các số thực.

• Tính chất kết hợp :

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

• Tính chất giao hoán :

$$z + z' = z' + z \text{ với mọi } z, z' \in \mathbb{C}.$$

• Cộng với 0 :

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

• Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là *số đối* của số phức z.

H2 *Trong mặt phẳng phức, cho điểm M biểu diễn số z. Hãy tìm điểm biểu diễn số –z.*

c) Phép trừ hai số phức

ĐỊNH NGHĨA 4

Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z với $-z'$, tức là

$$z - z' = z + (-z').$$

Nếu $z = a + bi,\ z' = a' + b'i\ \ (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ thì

$$z - z' = a - a' + (b - b')i.$$

d) Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Trong mặt phẳng phức, ta đã coi điểm M có toạ độ $(a\,;b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Ta cũng coi mỗi vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(a\,;b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Khi đó, nói điểm M biểu diễn số phức z cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

Dễ thấy rằng, nếu $\vec{u}, \vec{u}'$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

$\vec{u} + \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z + z'$,

$\vec{u} - \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z - z'$.

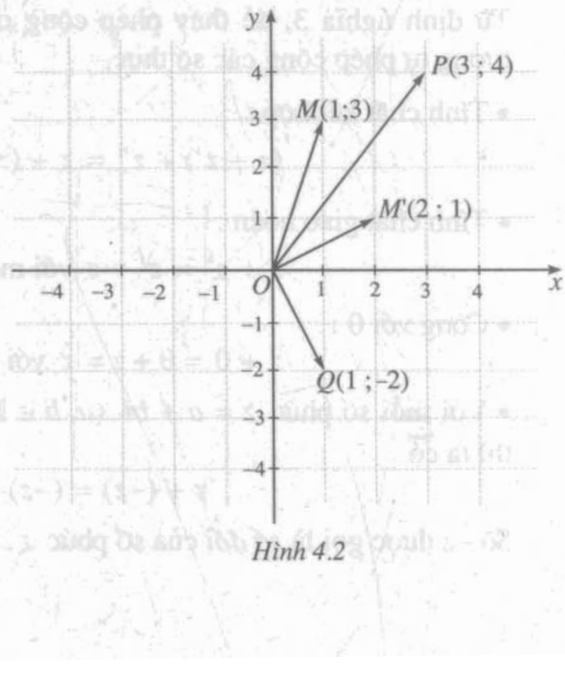
Ví dụ 3. Quan sát hình 4.2, ta thấy :

Vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ có toạ độ $(1\,;3)$ biểu diễn số phức $z = 1 + 3i$;

Vectơ $\overrightarrow{OM'} = \vec{u}'$ có toạ độ $(2\,;1)$ biểu diễn số phức $z' = 2 + i$;

Vectơ $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{u}'$ có toạ độ $(3\,;4)$ biểu diễn số phức $z + z' = 3 + 4i$;

Vectơ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{MM'} = \vec{u}' - \vec{u}$ có toạ độ $(1\,;-2)$ biểu diễn số phức $z' - z = 1 - 2i$.



Hình 4.2

4. Phép nhân số phức

a) Tích của hai số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$. Thực hiện phép nhân một cách hình thức biểu thức $a + bi$ với biểu thức $a' + b'i$, rồi thay $i^2 = -1$, ta được

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + bb'i^2 + (ab' + a'b)i \\ &= aa' - bb' + (ab' + a'b)i.\end{aligned}$$

Điều đó dẫn ta đến định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA 5

> **Tích của hai số phức** $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức
>
> $$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Ví dụ 4. Ta có

$$(2 - i)(1 + 2i) = (2 + 2) + (4 - 1)i = 4 + 3i\ ;$$

$$(2 + i)(2 - i) = (4 + 1) + (-2 + 2)i = 5\ ;$$

$$(2 + i)(1 + 2i) = (2 - 2) + (4 + 1)i = 5i\ .$$

Nhận xét. Với mọi số thực k và mọi số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$k(a + bi) = (k + 0i)(a + bi) = ka + kbi\ ,$$

đặc biệt $0z = 0$ với mọi số phức z.

H3 *Nếu vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức z thì vectơ $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$ biểu diễn số phức nào ? Vì sao ?*

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng phức, nếu điểm M biểu diễn số phức z, điểm M' biểu diễn số phức z' (M khác M') thì trung điểm P của đoạn thẳng MM' biểu diễn số phức $\frac{1}{2}(z + z')$. Điều đó suy ra từ hệ thức $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'})$.

H4 *Xét số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Tính z^2 và tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho z^2 là số thực.*

b) Tính chất của phép nhân số phức

Từ định nghĩa 5, dễ thấy rằng phép nhân các số phức có các tính chất sau đây tương tự phép nhân các số thực.

- Tính chất giao hoán :

$$zz' = z'z \text{ với mọi } z, z' \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất kết hợp :

$$(zz')z'' = z(z'z'') \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

- Nhân với 1 :

$$1.z = z.1 = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng) :

$$z(z' + z'') = zz' + zz'' \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Từ các tính chất nói trên ta có thể thực hiện phép toán cộng và nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.

Ví dụ 6. $(z + z')(z - z') = zz + z'z - zz' - z'z' = z^2 - z'^2$;

$(z + z')(z + z') = (z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;

$(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2$ $(b \in \mathbb{R})$;

$i^3 = i^2.i = -i$, $i^4 = i^2.i^2 = 1$, $i^5 = i$;

$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$.

H5 *Hãy phân tích $z^2 + 4$ thành nhân tử.*

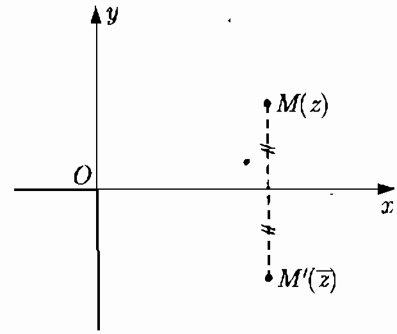
5. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

ĐỊNH NGHĨA 6

> **Số phức liên hợp** của $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\bar{z}$.

Như vậy $\boxed{\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.}$



Hình 4.3

Ví dụ 7. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$;

$\overline{-4 - \sqrt{2}i} = -4 + \sqrt{2}i$;

$\overline{i} = -i$;

$\overline{-i} = i.$

• Rõ ràng $\overline{\overline{z}} = z$ nên người ta còn nói z và $\overline{z}$ là *hai số phức liên hợp với nhau* (gọi tắt là *hai số phức liên hợp*).

Hai số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng với nhau qua trục thực Ox (h.4.3).

H6 *Chứng minh rằng số phức z là số thực khi và chỉ khi* $z = \overline{z}$.

• Từ định nghĩa 6, dễ suy ra :

Với mọi số phức z, z', ta có

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} ;$$

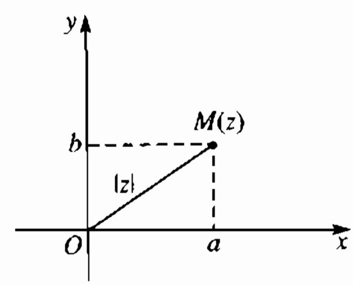
$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

H7 *Chứng minh rằng với mọi số phức* $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, *ta có* $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

b) Môđun của số phức

Ta đã biết giá trị tuyệt đối của số thực a là khoảng cách từ điểm biểu diễn a đến gốc toạ độ trên trục số. Dễ thấy rằng khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ đến gốc toạ độ O của mặt phẳng phức là

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} \text{ (h.4.4).}$$



Hình 4.4

ĐỊNH NGHĨA 7

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$.

Như vậy

> Nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ 8. $|i| = 1$; $|1 + 2i| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Nhận xét

1) Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

2) $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z sao cho $|z| = 1$ là đường tròn bán kính 1 với tâm tại gốc toạ độ.

H8 *Chứng minh rằng $|\overline{z}| = |z|$ với mọi số phức z.*

6. Phép chia cho số phức khác 0

H9 *Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0. Chứng minh rằng số $z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi) = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ là số thoả mãn $zz^{-1} = 1$.*

ĐỊNH NGHĨA 8

> **Số nghịch đảo** của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.
>
> **Thương** $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z, tức là $\frac{z'}{z} = z'z^{-1}$.

Như vậy

> Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

CHÚ Ý

Do $\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$ nên để tính $\frac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử số và mẫu số với $\overline{z}$.

Ví dụ 10

$$\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i\ ;$$

$$\frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\frac{(\sqrt{2}+2i)(\sqrt{2}+2i)}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}=\frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2})^2+2^2}=\frac{-2+4\sqrt{2}i}{6}=\frac{-1+2\sqrt{2}i}{3};$$

$$\frac{1}{i}=-i.$$

Nhận xét

1) Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z}=1.z^{-1}=z^{-1}$.

2) Dễ thấy rằng thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw=z'$. Từ đó có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

H10 *Tìm số phức z thoả mãn* $(1+2i)z=3z-i$.

Câu hỏi và bài tập

1. Cho các số phức

$$2+3i\ ;\ 1+2i\ ;\ 2-i.$$

a) Biểu diễn các số đó trong mặt phẳng phức.

b) Viết số phức liên hợp của mỗi số đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

c) Viết số đối của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

2. Xác định phần thực và phần ảo của mỗi số sau :

a) $i+(2-4i)-(3-2i)$; b) $(\sqrt{2}+3i)^2$;

c) $(2+3i)(2-3i)$; d) $i(2-i)(3+i)$.

3. Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một lục giác đều có tâm là gốc toạ độ O trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số i.

4. Thực hiện phép tính

$$\frac{1}{2-3i}\ ;\quad \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ;\quad \frac{3-2i}{i}\ ;\quad \frac{3-4i}{4-i}.$$

5. Cho $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Hãy tính : $\frac{1}{z}$; $\overline{z}$; z^2 ; $(\overline{z})^3$; $1 + z + z^2$.

6. Chứng minh rằng :

a) Phần thực của số phức z bằng $\frac{1}{2}(z + \overline{z})$, phần ảo của số phức z bằng $\frac{1}{2i}(z - \overline{z})$;

b) Số phức z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\overline{z}$;

c) Với mọi số phức z, z', ta có $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$, và nếu $z \neq 0$ thì $\frac{\overline{z'}}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}$.

7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m > 0$, ta có

$$i^{4m} = 1 \ ; \ i^{4m+1} = i \ ; \ i^{4m+2} = -1 \ ; \ i^{4m+3} = -i.$$

8. Chứng minh rằng :

a) Nếu vectơ $\vec{u}$ của mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thì độ dài của vectơ $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = |z|$, và từ đó nếu các điểm A_1, A_2 theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2 thì $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = |z_2 - z_1|$;

b) Với mọi số phức z, z', ta có $|zz'| = |z||z'|$ và khi $z \neq 0$ thì $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$;

c) Với mọi số phức z, z', ta có $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

9. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) $|z - i| = 1$; b) $\left|\frac{z - i}{z + i}\right| = 1$; c) $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i|$.

Luyện tập

10. Chứng minh rằng với mọi số phức $z \neq 1$, ta có

$$1 + z + z^2 + ... + z^9 = \frac{z^{10} - 1}{z - 1}.$$

11. Hỏi mỗi số sau đây là số thực hay số ảo (z là số phức tuỳ ý cho trước sao cho biểu thức xác định) ?

$$z^2 + (\overline{z})^2 \;; \qquad \frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3} \;; \qquad \frac{z^2 - (\overline{z})^2}{1 + z\overline{z}}.$$

12. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) z^2 là số thực âm ; b) z^2 là số ảo ;

c) $z^2 = (\overline{z})^2$; d) $\dfrac{1}{z - i}$ là số ảo.

13. Tìm nghiệm phức của các phương trình sau :

a) $iz + 2 - i = 0$; b) $(2 + 3i)z = z - 1$;

c) $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$; d) $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0$;

e) $z^2 + 4 = 0$.

14. a) Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi $z \neq i$, hãy tìm phần thực và phần ảo của số phức $\dfrac{z + i}{z - i}$.

b) Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $\dfrac{z + i}{z - i}$ là số thực dương.

15. a) Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào ?

b) Xét ba điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

16. *Đố vui.* Trong mặt phẳng phức cho các điểm : O (gốc toạ độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz'.

Hai tam giác OAB, $OA'B'$ có phải là hai tam giác đồng dạng không ?

§ 2 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Căn bậc hai của số phức

ĐỊNH NGHĨA

> Cho số phức w. Mỗi số phức z thoả mãn $z^2 = w$ được gọi là một **căn bậc hai** của w.

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$ (với ẩn z).

Có thể tìm căn bậc hai của số phức w như sau :

a) Trường hợp w là số thực

Dễ thấy rằng căn bậc hai của 0 là 0.

Xét số thực $w = a \neq 0$,

Khi $a > 0$ thì $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$. Do đó, $z^2 - a = 0$ khi và chỉ khi $z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$. Vậy a có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi $a < 0$ thì $z^2 - a = (z - \sqrt{-a}\, i)(z + \sqrt{-a}\, i)$. Do đó, $z^2 - a = 0$ khi và chỉ khi $z = \sqrt{-a}\, i$ hoặc $z = -\sqrt{-a}\, i$. Vậy a có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\, i$ và $-\sqrt{-a}\, i$.

Ví dụ 1. Hai căn bậc hai của -1 là i và $-i$.

Hai căn bậc hai của $-a^2$ (a là số thực khác 0) là ai và $-ai$.

b) Trường hợp $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $b \neq 0$

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là

$$(x + yi)^2 = a + bi.$$

Do $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $z^2 = w$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Vậy để tìm các căn bậc hai của $w = a + bi$ ta cần giải hệ phương trình này.

Mỗi cặp số thực $(x ; y)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ta một căn bậc hai $x + yi$ của số phức $a + bi$.

Ví dụ 2

a) Tìm các căn bậc hai của $-5 + 12i$, tức là tìm các số phức $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = -5 + 12i$ nên ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy \ = 12. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai cho $y = \dfrac{12}{2x} = \dfrac{6}{x}$, thay vào phương trình thứ nhất, ta có :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x}. \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm $(2 ; 3)$; $(-2 ; -3)$.

Vậy có hai căn bậc hai của $-5 + 12i$ là $2 + 3i$ và $-2 - 3i$.

b) Tìm các căn bậc hai của i tức là tìm $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = i$ nên ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy nó có hai nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vậy i có hai căn bậc hai là $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

• Một cách tổng quát, có thể chứng minh rằng

* Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.

* Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt, số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$; số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\,i$ và $-\sqrt{-a}\,i$.

H1 *Biết một căn bậc hai của w_1 là z_1 và một căn bậc hai của w_2 là z_2. Hãy tìm tất cả các căn bậc hai của w_1w_2.*

2. Phương trình bậc hai

Nhờ tính được căn bậc hai của số phức, dễ thấy mọi phương trình bậc hai

$$Az^2 + Bz + C = 0 \qquad (1)$$

trong đó A, B, C là những số phức, $(A \neq 0)$ đều có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Việc giải phương trình đó được tiến hành tương tự như trong trường hợp A, B, C là những số thực. Cụ thể là :

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$.

* Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$z_1 = \frac{-B+\delta}{2A},\quad z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.

* Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}.$$

Đặc biệt, khi Δ là số thực dương thì hai nghiệm của phương trình (1) là $z_1 = \dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$; khi Δ là số thực âm thì hai nghiệm của phương trình (1) là $z_1 = \dfrac{-B+\sqrt{-\Delta}\,i}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\sqrt{-\Delta}\,i}{2A}$.

Ví dụ 3

a) Phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có biệt thức $\Delta = -3$ nên nó có hai nghiệm phân biệt là $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

b) Phương trình $z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$ có biệt thức

$$\Delta = (-2 + i)^2 + 8i = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

nên nó có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{1}{2}[2 - i + (2 + i)] = 2 \text{ và } z_2 = \frac{1}{2}[2 - i - (2 + i)] = -i.$$

H2 *Xét phương trình bậc hai*

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

trong đó A, B, C là những số thực, $A \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của phương trình thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của nó.

CHÚ Ý

Trên đây, ta đã thấy mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Hơn nữa, người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots + A_{n-1}z + A_n = 0$$

(trong đó n là một số nguyên dương, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ là $n + 1$ số phức cho trước, $A_0 \neq 0$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

Tính chất quan trọng này của tập hợp các số phức là nội dung của một định lí gọi là *Định lí cơ bản của đại số*.

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

$$-i \ ; \ 4i \ ; \ -4 \ ; \ 1 + 4\sqrt{3}i.$$

18. Chứng minh rằng nếu z là một căn bậc hai của số phức w thì $|z| = \sqrt{|w|}$.

19. Tìm nghiệm phức của các phương trình bậc hai sau :

a) $z^2 = z + 1$;

b) $z^2 + 2z + 5 = 0$;

c) $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$.

Chú ý : Có thể dùng máy tính bỏ túi để tìm nghiệm (gần đúng) của phương trình bậc hai với hệ số thực ngay cả khi nghiệm của nó không phải là số thực.

Chẳng hạn, dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-500MS* để giải phương trình $x^2 - 6x + 58 = 0$ thì ấn

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 1 $\boxed{\text{MODE}}$ 2 (để vào chương trình giải phương trình bậc hai), ấn tiếp

1 $\boxed{=}$ −6 $\boxed{=}$ 58 (để đưa vào các hệ số của phương trình) ; ấn tiếp

$\boxed{=}$: trên màn hình hiện $x1 = 3$; ấn tiếp

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Re} \leftrightarrow \text{Im}}$: trên màn hình hiện $x1 = 7._i$, (điều đó có nghĩa là nghiệm thứ nhất là $3 + 7i$) ; ấn tiếp

$\boxed{=}$: trên màn hình hiện $x2 = 3$; ấn tiếp

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Re} \leftrightarrow \text{Im}}$: trên màn hình hiện $x2 = -7._i$, (điều đó có nghĩa là nghiệm thứ hai là $3 - 7i$).

(Thực ra, chỉ cần biết nghiệm thứ nhất là $3 + 7i$ thì đã suy ra ngay nghiệm thứ hai là $\overline{3 + 7i} = 3 - 7i$).

20. a) Hỏi công thức Vi-ét về phương trình bậc hai với hệ số thực có còn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức không ? Vì sao ?

b) Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng $4 - i$ và tích của chúng bằng $5(1 - i)$.

c) Có phải mọi phương trình bậc hai $z^2 + Bz + C = 0$ (B, C là hai số phức) nhận hai nghiệm là hai số phức liên hợp không thực phải có các hệ số B, C là hai số thực ? Vì sao ? Điều ngược lại có đúng không ?

21. a) Giải phương trình sau :

$$(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0.$$

b) Tìm số phức B để phương trình bậc hai $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.

22. *Đố vui.* Một học sinh kí hiệu một căn bậc hai của -1 là $\sqrt{-1}$ và tính $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ như sau :

a) Theo định nghĩa căn bậc hai của -1 thì $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$.

b) Theo tính chất của căn bậc hai (tích của hai căn bậc hai của hai số bằng căn bậc hai của tích hai số đó) thì

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Từ đó, học sinh đó suy ra $-1 = 1$.

Hãy tìm điều sai trong lập luận trên.

Em có biết

VÀI NÉT LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN SỐ PHỨC

Từ lâu, người ta đã biết công thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Hỏi có chăng công thức nghiệm của phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$$

(chỉ dùng phép tính cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn trên các hệ số) ?

Đến thế kỉ XVI, Các-đa-nô (G. Cardano, 1501 – 1576, người Ý) tìm ra một công thức như thế ; nhưng dù a, b, c, d là những số thực và chỉ nhằm tìm nghiệm thực, công thức vẫn đề cập đến số phức.

Girolamo Cardano
(1501 – 1576)

Chẳng hạn, với phương trình $x^3 + px + q = 0$ (p, q là hai số thực cho trước) thì công thức nghiệm có dạng

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Cụ thể là gọi δ là một căn bậc hai của $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, lấy u, v sao cho $u^3=-\frac{q}{2}+\delta$, $v^3=-\frac{q}{2}-\delta$ (mà $uv=-\frac{p}{3}$) thì $x=u+v$ là một nghiệm của $x^3+px+q=0$.

Nếu $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ thì ta gặp căn bậc hai δ của số thực âm nhưng kết quả $u+v$ có thể vẫn là số thực.

Ví dụ, với phương trình $x^3-15x-4=0$ thì $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-121$; lấy $\delta=11i$ thì $-\frac{q}{2}+\delta=2+11i=(2+i)^3$; $-\frac{q}{2}-\delta=2-11i=(2-i)^3$. Vậy lấy $u=2+i$, $v=2-i\left(uv=5=-\frac{p}{3}\right)$ thì $u+v=4$ là một nghiệm của phương trình $x^3-15x-4=0$.

Tuy công thức nghiệm phương trình bậc ba mang tên Các-đa-nô nhưng thực ra, Tác-ta-gli-a (N. Tartaglia, 1499 – 1557, người Ý) đã tìm được lời giải nhiều kiểu phương trình bậc ba và tiết lộ phương pháp giải cho Các-đa-nô. Nhờ đó Các-đa-nô tìm ra lời giải tổng quát và công bố nó vào năm 1545. Một học trò của Các-đa-nô là Fe-ra-ri (L. Ferrari, 1522 – 1565, người Ý) tìm ra cách giải phương trình bậc bốn bằng cách đưa về giải một phương trình bậc ba.

Việc các nhà toán học Ý táo bạo dùng các biểu thức chứa những số đang còn có vẻ bí ẩn (số ảo) để đến được kết quả thực dần dà cũng làm cho các nhà toán học chấp nhận sử dụng kí hiệu $a+b\sqrt{-1}$ (a, b là hai số thực) khi giải phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn trong thế kỉ XVII.

Sang đầu thế kỉ XVIII, Moa-vrơ (A. De Moivre, 1667 – 1754, người Anh) tìm được mối liên quan giữa căn của số phức với lượng giác. Năm 1746, Đa-lăm-be (J. D'Alembert, 1717 – 1783, người Pháp) đưa ra chứng minh đầu tiên định lí cơ bản của đại số. Ơ-le (L. Euler, 1707 – 1783, người Thuỵ Sĩ) cũng nghiên cứu vấn đề này và chính Ơ-le đã dùng kí hiệu i để chỉ đơn vị ảo. Gau-xơ (C. Gauss, 1777 – 1855, người Đức) đưa ra chứng minh đầy đủ định lí cơ bản của đại số vào năm 1799.

Đến thế kỉ XIX, lí thuyết hàm số biến số phức được phát triển mạnh (những người đóng góp lớn là Cô-si (A.L. Cauchy, 1789 – 1857, người Pháp), Ri-man (B. Riemann, 1826 – 1866, người Đức), ...). Ngày nay số phức xuất hiện trong nhiều nghiên cứu toán học, vật lí, khoa học, kĩ thuật.

Luyện tập

23. Tìm nghiệm phức của phương trình $z + \dfrac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau :

a) $k = 1$; b) $k = \sqrt{2}$; c) $k = 2i$.

24. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$ (tức là tìm nghiệm phức của các phương trình đó) và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của mỗi phương trình (trong mặt phẳng phức) :

a) $z^3 + 1 = 0$; b) $z^4 - 1 = 0$;

c) $z^4 + 4 = 0$; d) $8z^4 + 8z^3 = z + 1$.

25. a) Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z)

$$z^2 + bz + c = 0$$

nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm.

b) Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z)

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

26. a) Dùng công thức cộng trong lượng giác để chứng minh rằng với mọi số thực φ, ta có

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Từ đó hãy tìm mọi căn bậc hai của số phức $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$. Hãy so sánh cách giải này với cách giải trong bài học ở §2.

b) Tìm các căn bậc hai của $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ bằng hai cách nói ở câu a).

§ 3 DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

1. Số phức dưới dạng lượng giác

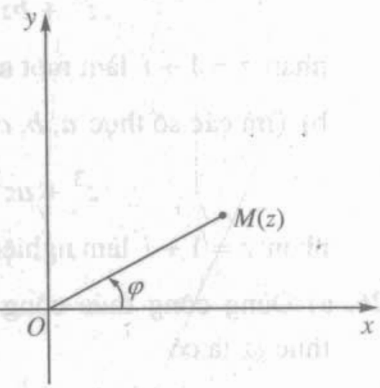
a) Acgumen của số phức $z \neq 0$

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một **acgumen của** z.

CHÚ Ý

Nếu φ là một acgumen của z (h.4.5) thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. (Người ta thường nói : Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).



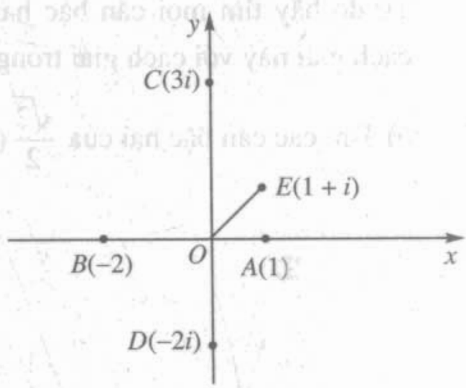
Hình 4.5

Ví dụ 1 (h.4.6).

a) Số thực dương tuỳ ý có một acgumen là 0.

b) Số thực âm tuỳ ý có một acgumen là π.

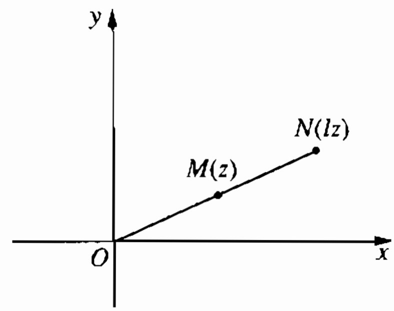
c) Các số $3i$, $-2i$ và $1 + i$ theo thứ tự có một acgumen là $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{4}$.



Hình 4.6

Nhận xét

Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có acgumen sai khác $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, vì các điểm biểu diễn của chúng cùng thuộc một tia gốc O (h.4.7).



Hình 4.7

H1 *Biết số phức $z \neq 0$ có một acgumen là φ. Hãy tìm một acgumen của mỗi số phức sau :*

$$-z \; ; \; \overline{z} \; ; \; -\overline{z} \; ; \; \frac{1}{z} \text{ (để ý rằng } \frac{1}{z} = \frac{1}{z\overline{z}}\overline{z}\text{)}.$$

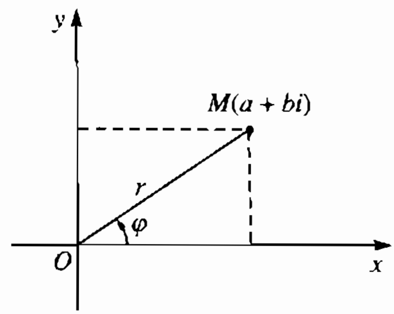
b) Dạng lượng giác của số phức

Xét số phức $z = a + bi \neq 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Kí hiệu r là môđun của z và φ là một acgumen của z (h.4.8) thì dễ thấy rằng :

$$a = r\cos\varphi, \; b = r\sin\varphi.$$

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



Hình 4.8

Ta có

ĐỊNH NGHĨA 2

> Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức** $z \neq 0$. Còn dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được gọi là *dạng đại số của số phức z*.

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước, ta cần :

1) Tìm r : đó là môđun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2) Tìm φ : đó là một acgumen của z ; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

Ví dụ 2

a) Số 2 có môđun bằng 2, có một acgumen bằng 0 nên nó có dạng lượng giác $2(\cos 0 + i\sin 0)$;

b) Số -2 có môđun bằng 2, có một acgumen bằng π nên nó có dạng lượng giác $2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

c) Số i có môđun bằng 1, có một acgumen bằng $\frac{\pi}{2}$ nên nó có dạng lượng giác $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

d) Số $1 + i$ có môđun bằng $\sqrt{2}$, có một acgumen bằng $\frac{\pi}{4}$ nên nó có dạng lượng giác $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

e) Số $1 - \sqrt{3}i$ có môđun bằng $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, có một acgumen là φ sao cho $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Lấy $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ thì

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

CHÚ Ý

1) $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

2) Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tuỳ ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$).

3) Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

Ví dụ 3

a) Số phức $-(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có dạng lượng giác là

$$\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi).$$

b) Số phức $\cos\varphi - i\sin\varphi$ có dạng lượng giác là

$$\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$$

$\boxed{\textbf{H2}}$ *Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$, tìm môđun và một acgumen của $\frac{1}{z}$, từ đó suy ra dạng lượng giác của $\frac{1}{z}$.*

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Ta đã biết công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lí nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác ; chúng cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

ĐỊNH LÍ

> Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
>
> $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0, r' \geq 0)$,
>
> thì $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$,
>
> $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]$ (khi $r > 0$).

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các môđun và tổng các acgumen ; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các môđun và hiệu các acgumen.

Chứng minh

$$\begin{aligned} zz' &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)][r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Theo công thức nhân số phức, ta có

$$\frac{z'}{z} = z'\cdot\frac{1}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]. \qquad \square$$

Ví dụ 4. Ta có $\quad 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

và $\quad \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,

nên

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu thực hiện phép chia trong ví dụ 4 dưới dạng đại số, ta được

$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{4}\left[1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i\right]$ nên từ kết quả trên suy ra

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

3. Công thức Moa-vrơ (Moivre) và ứng dụng

a) Công thức Moa-vrơ

A. De Moivre
(1667 – 1754)

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n,

$$\boxed{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

và khi $r = 1$, ta có

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.}$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là *công thức Moa-vrơ*.

Ví dụ 5. $(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5$

$$= (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -4(1+i).$$

b) Ứng dụng vào lượng giác

Công thức khai triển luỹ thừa bậc ba của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ cho ta

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi(i\sin\varphi) + 3\cos\varphi(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Mặt khác, theo công thức Moa-vrơ,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Từ đó suy ra

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Tương tự, bằng cách đối chiếu công thức khai triển luỹ thừa bậc n của nhị thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ với công thức Moa-vrơ, có thể biểu diễn $\cos n\varphi$ và $\sin n\varphi$ theo các luỹ thừa của $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

c) Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Từ công thức Moa-vrơ, dễ thấy số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

và $$-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right].$$

Câu hỏi và bài tập

27. Hãy tìm dạng lượng giác của các số phức : $\overline{z}$; $-z$; $\dfrac{1}{\overline{z}}$; kz $(k \in \mathbb{R}^*)$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$;

b) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

28. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $1 - i\sqrt{3}$; $1 + i$; $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$; $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$;

b) $2i(\sqrt{3} - i)$;

c) $\dfrac{1}{2 + 2i}$;

d) $z = \sin\varphi + i\cos\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

Chú ý. Có thể dùng máy tính bỏ túi để chuyển đổi dạng đại số với dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$. Chẳng hạn, dùng máy tính bỏ túi CASIO fx – 500MS để :

1) Đổi từ dạng đại số $z = 1 + \sqrt{3}i$ thành dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì (đặt ở chế độ "rađian") ấn liên tiếp

$\boxed{\text{Pol(}}$ 1 $\boxed{,}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$: trên màn hình hiện 2 (tức là $r = 2$) ; ấn tiếp

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{F}}$: trên màn hình hiện F = 1,047197551 (tức là $\varphi \approx \frac{\pi}{3}$).

2) Đổi từ dạng lượng giác $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ thành dạng đại số $z = a + bi$ thì (đặt ở chế độ "rađian") ấn liên tiếp

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Rec(}}$ 2 $\boxed{,}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

trên màn hình hiện 1 (tức $a = 1$) ; ấn tiếp

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\text{F}}$: trên màn hình hiện F = 1,732050808 (tức là $b \approx \sqrt{3}$).

29. Dùng công thức khai triển nhị thức Niu-tơn $(1 + i)^{19}$ và công thức Moa-vrơ để tính $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

30. Gọi M, M' là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $z = 3 + i$, $z' = (3 - \sqrt{3}) + (1 + 3\sqrt{3})i$.

a) Tính $\frac{z'}{z}$.

b) Chứng minh rằng hiệu số acgumen của z' với acgumen của z là một số đo của góc lượng giác (OM, OM'). Tính số đo đó.

31. Cho các số phức $w = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ và $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

a) Chứng minh rằng $z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_1 = z_0\varepsilon$, $z_2 = z_0\varepsilon^2$ là các nghiệm của phương trình $z^3 - w = 0$.

b) Biểu diễn hình học các số phức z_0, z_1, z_2.

Luyện tập

32. Sử dụng công thức Moa-vrơ để tính $\sin 4\varphi$ và $\cos 4\varphi$ theo các luỹ thừa của $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$.

33. Tính

$$(\sqrt{3}-i)^6\ ; \qquad \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004}; \qquad \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}.$$

34. Cho số phức $w = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Tìm các số nguyên dương n để w^n là số thực.

Hỏi có chăng một số nguyên dương m để w^m là số ảo ?

35. Viết dạng lượng giác của số phức z và của các căn bậc hai của z cho mỗi trường hợp sau :

a) $|z| = 3$ và một acgumen của iz là $\frac{5\pi}{4}$;

b) $|z| = \frac{1}{3}$ và một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$.

36. Viết dạng lượng giác của các số phức sau :

a) $1 - i\tan\frac{\pi}{5}$; b) $\tan\frac{5\pi}{8} + i$;

c) $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Bài đọc thêm

CĂN BẬC n CỦA SỐ PHỨC

Tương tự định nghĩa căn bậc hai của số phức, ta gọi số phức z sao cho $z^n = w$ là một **căn bậc n của số phức w** (n là số nguyên cho trước, $n > 1$).

Rõ ràng chỉ có một căn bậc n của $w = 0$ là 0.

Khi $w \neq 0$, ta viết w dưới dạng lượng giác $w = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $R > 0$. Ta cần tìm $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $(r > 0)$ sao cho $z^n = w$.

Theo công thức Moa-vrơ, $z^n = w$ có nghĩa là

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

tức là $r^n = R$ và $n\varphi = \alpha + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Từ đó $r = \sqrt[n]{R}$, $\varphi = \dfrac{\alpha + k2\pi}{n}$, tức là

$$z = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)\right].$$

Lấy $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, ta được n căn bậc n phân biệt của w.

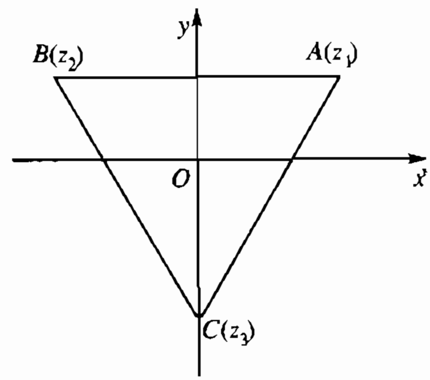
Ví dụ

Số $w = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ có ba căn bậc ba là

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i);$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i);$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -i;$$



Hình 4.9

(trên hình 4.9 có ba điểm A, B, C theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_3).

Chú ý : Nếu $w \neq 0$ thì các căn bậc n ($n \geq 3$ cho trước) của w được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một n-giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{|w|}$.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương IV

37. Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a) $(2 - 3i)^3$;

b) $\dfrac{3 + 2i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{3 - 2i}$;

c) $(x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Với x, y nào thì số phức đó là số thực ?

38. Chứng minh rằng nếu $|z| = |w| = 1$ thì số

$$\frac{z + w}{1 + zw}$$

là số thực (giả sử $1 + zw \neq 0$).

39. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$:

a) $(z + 3 - i)^2 - 6(z + 3 - i) + 13 = 0$;

b) $\left(\dfrac{iz + 3}{z - 2i}\right)^2 - 3\dfrac{iz + 3}{z - 2i} - 4 = 0$;

c) $(z^2 + 1)^2 + (z + 3)^2 = 0$.

40. Xét các số phức

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}, \qquad z_2 = -2 - 2i, \qquad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

a) Viết z_1, z_2, z_3 dưới dạng lượng giác.

b) Từ câu a), hãy tính $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ và $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

41. Cho $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

a) Viết z^2 dưới dạng đại số và dưới dạng lượng giác.

b) Từ câu a), hãy suy ra dạng lượng giác của z.

42. a) Bằng cách biểu diễn hình học các số phức $2 + i$ và $3 + i$, hãy chứng minh rằng nếu $\tan a = \dfrac{1}{2}$, $\tan b = \dfrac{1}{3}$ với $a, b \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $a + b = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Bằng cách biểu diễn hình học các số phức $2 + i$, $5 + i$ và $8 + i$, hãy chứng minh rằng nếu $\tan a = \dfrac{1}{2}$, $\tan b = \dfrac{1}{5}$, $\tan c = \dfrac{1}{8}$ với $a, b, c \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $a + b + c = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

43. Phần thực của $z = 2i$ là

(A) 2 ; (B) $2i$; (C) 0 ; (D) 1.

44. Phần ảo của $z = -2i$ là

(A) -2 ; (B) $-2i$; (C) 0 ; (D) -1.

45. Số $z + \overline{z}$ là

(A) số thực ; (B) số ảo ; (C) 0 ; (D) 2.

46. Số $z - \overline{z}$ là :

(A) số thực ; (B) số ảo ; (C) 0 ; (D) $2i$.

47. Số $\dfrac{1}{1+i}$ bằng

(A) $1 + i$; (B) $\dfrac{1}{2}(1 - i)$; (C) $1 - i$; (D) i.

48. Tập hợp các nghiệm của phương trình $z = \dfrac{z}{z+i}$ là

(A) $\{0 ; 1 - i\}$; (B) $\{0\}$; (C) $\{1 - i\}$; (D) $\{0, 1\}$.

49. Môđun của $1 - 2i$ bằng

(A) 3 ; (B) $\sqrt{5}$; (C) 2 ; (D) 1.

50. Môđun của $-2iz$ bằng

(A) $-2|z|$; (B) $\sqrt{2}z$; (C) $2|z|$; (D) 2.

51. Acgumen của $-1 + i$ bằng

(A) $\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; (B) $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(C) $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; (D) $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

52. Nếu acgumen của z bằng $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

(A) Phần ảo của z là số dương và phần thực của z bằng 0 ;

(B) Phần ảo của z là số âm và phần thực của z bằng 0 ;

(C) Phần thực của z là số âm và phần ảo của z bằng 0 ;

(D) Phần thực và phần ảo của z đều là số âm.

53. Nếu $z = \cos\varphi - i\sin\varphi$ thì acgumen của z bằng

(A) $\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(B) $-\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(C) $\varphi + \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(D) $\varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

54. Nếu $z = -\sin\varphi - i\cos\varphi$ thì acgumen của z bằng

(A) $-\frac{\pi}{2} + \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(B) $-\frac{\pi}{2} - \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(C) $\frac{\pi}{2} + \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(D) $\pi - \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

I – BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = e^x - x - 1$ đồng biến trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

   b) Từ đó, suy ra $e^x > x + 1$ với mọi $x > 0$.

2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 10$.

   b) Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 3x^2 - 12x - 10 = 0$ có nghiệm thực duy nhất.

   c) Gọi nghiệm thực duy nhất của phương trình là α. Chứng minh rằng $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

3. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \ln x$ và (D) là một tiếp tuyến bất kì của (C). Chứng minh rằng trên khoảng $(0 ; +\infty)$, (C) nằm ở phía dưới của đường thẳng (D).

4. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho n máy chạy trong một giờ là $10(6n + 10)$ nghìn đồng.

Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy để được lãi nhiều nhất ?

5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 6}}$ trên đoạn $[0 ; 1]$.

6. a) Cho $P(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$ và hai số a, b thoả mãn $a + b = 1$. Hãy tính $P(a) + P(b)$.

b) Hãy so sánh $A = \sqrt[3]{18}$ và $B = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$.

7. a) Chứng minh rằng nếu a và b là hai số dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}\left(\log_7 a + \log_7 b\right)$.

b) Biết a và b là hai số dương, $a \neq 1$ sao cho $\log_a b = \sqrt{3}$. Hãy tính $\log_{a\sqrt{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}$.

8. a) Tìm đạo hàm của các hàm số $y = \cos x.\, e^{2\tan x}$ và $y = \log_2(\sin x)$.

b) Chứng minh rằng hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ thoả mãn hệ thức $y''' - 13y' - 12y = 0$.

9. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2^x$, $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ và $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Hãy nêu nhận xét về vị trí tương đối của ba đồ thị đó.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_3 x$. Từ đó hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = 2 + \log_3 x$ và đồ thị của hàm số $y = \log_3(x + 2)$.

10. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$;

b) $\log_3\left(\log^2_{\frac{1}{2}} x - 3\log_{\frac{1}{2}} x + 5\right) = 2$;

c) $4^{\log x+1} - 6^{\log x} - 2.3^{\log x^2+2} = 0$;

d) $\begin{cases} 2^x 8^{-y} = 2\sqrt{2}, \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\log_3(9y). \end{cases}$

11. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$;

b) $y = \sqrt{\log_{0,5}(-x^2 + x + 6)} + \dfrac{1}{x^2 + 2x}$.

12. Tìm nguyên hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = x^3(1 + x^4)^3$; b) $y = \cos x \sin 2x$; c) $y = \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

13. Tìm hàm số f, biết rằng $f'(x) = 8\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)$ và $f(0) = 8$.

14. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$.

15. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y + x^2 = 0$ và $y + 3x^2 = 2$;

b) $y^2 - 4x = 4$ và $4x - y = 16$.

16. a) Cho hình thang cong A giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo được khi quay A quanh trục hoành.

b) Cho hình phẳng B giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $y = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay B quanh trục tung.

17. Cho các số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Hãy tính và biểu diễn hình học các số phức :

$$z_1^2 \ ; \ z_1 z_2 \ ; \ 2z_1 - z_2 \ ; \ z_1\overline{z_2} \ \text{ và } \ \frac{z_2}{z_1}.$$

18. Tính :

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2-\left(\sqrt{3}-i\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{3}+i\right)^2+\left(\sqrt{3}-i\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3-\left(\sqrt{3}-i\right)^3$;

d) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

19. a) Xác định phần thực của số phức $\dfrac{z+1}{z-1}$, biết rằng $|z|=1$ và $z\neq 1$.

b) Chứng minh rằng nếu $\dfrac{z+1}{z-1}$ là số ảo thì $|z|=1$.

20. Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $(1+i\sqrt{3})z+2$, trong đó $|z-1|\leq 2$.

21. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức :

$-8+6i$; $3+4i$ và $1-2\sqrt{2}\,i$.

22. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$:

a) $z^2-3z+3+i=0$;

b) $z^2-(\cos\varphi+i\sin\varphi)z+i\sin\varphi\cos\varphi=0$,

trong đó φ là số thực cho trước.

23. Tính $\left(\dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$ và $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{11}}$.

II – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

24. Hàm số $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1}$

(A) Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,1)$ và $(3\,;\,+\infty)$;

(B) Nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,1)$ và $(3\,;\,+\infty)$;

(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(3\ ;\ +\infty)$;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và đồng biến trên khoảng $(3\ ;\ +\infty)$.

25. Hàm số $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ có giá trị nhỏ nhất là

(A) $-\frac{1}{2}$; (B) 0 ; (C) -1 ; (D) $-\frac{1}{3}$.

26. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x}$. Khi đó

(A) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$ (khi $x \to +\infty$) ;

(B) Đường thẳng $y = x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$ (khi $x \to +\infty$) ;

(C) Đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của $(\mathscr{C})$ (khi $x \to +\infty$) ;

(D) Đồ thị $(\mathscr{C})$ không có tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$).

27. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$ tiếp xúc tại điểm $(1\ ;\ 1)$ với

(A) Parabol $y = 2x^2 - 1$; (B) Parabol $y = x^2$;

(C) Parabol $y = -x^2 + 2x$; (D) Đường thẳng $y = 2x + 1$.

28. Cho hai số dương a và b. Đặt $X = \ln\frac{a+b}{2}$ và $Y = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. Khi đó

(A) $X > Y$; (B) $X < Y$;

(C) $X \geq Y$; (D) $X \leq Y$.

29. Cho hai số không âm a và b. Đặt $X = e^{\frac{a+b}{2}}$ và $Y = \frac{e^a + e^b}{2}$. Khi đó

(A) $X > Y$; (B) $X < Y$;

(C) $X \geq Y$; (D) $X \leq Y$.

30. Cho $(\mathscr{G})$ là đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$. Ta có thể suy ra đồ thị của hàm số $y = \log_2 2(x + 3)$ bằng cách tịnh tiến $(\mathscr{G})$ theo vectơ

(A) $\vec{v} = (3\ ;\ 1)$; (B) $\vec{v} = (3\ ;\ -1)$;

(C) $\vec{v} = (-3\ ;\ 1)$ (D) $\vec{v} = (-3\ ;\ -1)$.

31. Cho hàm số $f(x) = \log_5(x^2 + 1)$. Khi đó

(A) $f'(1) = \dfrac{1}{2\ln 5}$; (B) $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 5}$;

(C) $f'(1) = \dfrac{3}{2\ln 5}$; (D) $f'(1) = \dfrac{2}{\ln 5}$.

32. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = a^x$ và đồ thị của hàm số $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $(\sqrt{2^{-1}}\ ;\ \sqrt{2})$. Khi đó

(A) $a > 1$ và $b > 1$; (B) $a > 1$ và $0 < b < 1$;

(C) $0 < a < 1$ và $b > 1$; (D) $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

33. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

(A) $\int f(x)dx = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3}{x} + C$; (B) $\int f(x)dx = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3}{x} + C$;

(C) $\int f(x)dx = 2x^3 - \dfrac{3}{x} + C$; (D) $\int f(x)dx = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3}{2x} + C$.

34. Đẳng thức

$$\int_0^a \cos(x + a^2)dx = \sin a$$

Xảy ra nếu

(A) $a = \pi$; (B) $a = \sqrt{\pi}$;

(C) $a = \sqrt{3\pi}$; (D) $a = \sqrt{2\pi}$.

35. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thoả mãn điều kiện

$$\int_1^e \ln\frac{k}{x}dx < e - 2.$$

Khi đó

(A) $S = \{1\}$; (B) $S = \{2\}$;

(C) $S = \{1 ; 2\}$; (D) $S = \varnothing$.

36. Cho số phức z tuỳ ý. Xét các số phức $\alpha = z^2 + (\overline{z})^2$ và $\beta = z\overline{z} + i(z - \overline{z})$. Khi đó

(A) α là số thực, β là số thực ; (B) α là số thực, β là số ảo ;

(C) α là số ảo, β là số thực ; (D) α là số ảo, β là số ảo.

37. Cho số phức tuỳ ý $z \neq 1$. Xét các số phức

$$\alpha = \frac{i^{2005} - i}{\overline{z} - 1} - z^2 + (\overline{z})^2 \text{ và } \beta = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\overline{z})^2 + \overline{z}.$$

Khi đó

(A) α là số thực, β là số thực ; (B) α là số thực, β là số ảo ;

(C) α là số ảo, β là số thực ; (D) α là số ảo, β là số ảo.

38. Nếu môđun của số phức z bằng r ($r > 0$) thì môđun của số phức $(1 - i)^2 z$ bằng

(A) $4r$; (B) $2r$;

(C) $r\sqrt{2}$; (D) r.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG I

4. $a \le 0$. **5.** $-2 \le a \le 2$. **10.** a) 18000 người và 22000 người ; b) $f'(t) = \dfrac{120}{(t+5)^2}$, $t > 0$;

c) • Năm 1990 : 0,192 ; • Năm 2008 : 0,065 ;

• Năm 1996. **11.** a) $y_{CĐ} = f(-3) = -1$;

$y_{CT} = f(-1) = -\dfrac{7}{3}$; b) Hàm số không có cực trị ; c) $y_{CĐ} = f(-1) = -2$; $y_{CT} = f(1) = 2$;

d) $y_{CĐ} = f(-1) = 1$; $y_{CT} = f(0) = 0$;

e) $y_{CĐ} = f(-1) = 2\dfrac{2}{15}$; $y_{CT} = f(1) = 1\dfrac{13}{15}$;

f) $y_{CĐ} = f(0) = -3$; $y_{CT} = f(2) = 1$.

12. a) $y_{CT} = y(-\sqrt{2}) = -2$; $y_{CĐ} = y(\sqrt{2}) = 2$;

b) $y_{CĐ} = y(0) = 2\sqrt{2}$;

c) $y_{CĐ} = y\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi$;

$y_{CT} = y\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi$;

d) $y_{CT} = y(k\pi) = 2(1 - \cos k\pi)$;

$y_{CĐ} = y\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = 4\dfrac{1}{2}$.

13. $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 0$. **14.** $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$. **16.** $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

17. a) ; $\max\limits_{x\in[-2;3]} f(x) = 10$; $\min\limits_{x\in[-2;3]} f(x) = -6$;

b) $\max\limits_{x\in[-4;0]} f(x) = -4$; $\min\limits_{x\in[-4;0]} f(x) = -5\dfrac{1}{3}$;

c) $\min\limits_{x>0} f(x) = 2$; d) $\max\limits_{x\in[2;4]} f(x) = 4$;

$\min\limits_{x\in[2;4]} f(x) = -4$; e) $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 3\dfrac{2}{3}$;

$\min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 2$; f) $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

18. a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 3$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -\dfrac{3}{2}$;

b) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 5\dfrac{1}{16}$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 3\dfrac{1}{2}$.

19. $BM = \dfrac{a}{4}$. Khi đó diện tích hình chữ nhật là $S = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$. **20.** $n = 12$ (con cá).

21. a) $y_{CT} = f(-1) = -\dfrac{1}{2}$; $y_{CĐ} = f(1) = \dfrac{1}{2}$;

b) $y_{CT} = f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 6\dfrac{3}{4}$; c) $y_{CĐ} = f(0) = \sqrt{5}$;

d) Hàm số không có cực trị. **22.** $m > 0$.

23. 20mg ; độ giảm huyết áp nhiều nhất là 100.

24. $M(-1 ; 1)$; $AM = \sqrt{5}$. **25.** 9 km/h.

26. a) 375 người/ngày ; b) ngày thứ 15 ; 675 người/ngày ; c) Từ ngày thứ 11 đến ngày thứ 19 ; d) Hàm số f đồng biến trên $[0 ; 25]$.

27. a) $\max\limits_{x\in[-3;1]} \sqrt{3-2x} = 3$; $\min\limits_{x\in[-3;1]} \sqrt{3-2x} = 1$;

b) $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$; $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2$;

c) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{11}{4}$;

d) $\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

28. Hình vuông có cạnh dài 10 cm.

29. a) $I\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right)$; $\begin{cases} x = X + \frac{3}{4} \\ y = Y - \frac{1}{8} \end{cases}$; $Y = 2X^2$;

b) $I\left(1; -\frac{7}{2}\right)$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - \frac{7}{2} \end{cases}$; $Y = \frac{1}{2}X^2$;

c) $I\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$; $\begin{cases} x = X + \frac{1}{8} \\ y = Y + \frac{1}{16} \end{cases}$; $Y = -4X^2$;

d) $I(0; -5)$; $\begin{cases} x = X \\ y = Y - 5 \end{cases}$; $Y = 2X^2$.

30. a) $I(1; -1)$; b) $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$; $Y = X^3 - 3X$;

c) $y = -3x + 2$. **31.** $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$; $Y = -\frac{1}{X}$;

32. a) $I(1; 1)$; b) $I(-1; 3)$.

33. $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$; $Y = aX + \frac{c}{X}$.

34. a) Tiệm cận đứng : $x = -\frac{2}{3}$; tiệm cận ngang: $y = \frac{1}{3}$; b) $x = -3$; $y = -2$; c) Tiệm cận xiên : $y = x + 2$; tiệm cận đứng : $x = 3$;

d) Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$; tiệm cận xiên: $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$; e) $x = 1$; $x = -1$; $y = 0$; f) $x = -1$; $y = 0$. **35.** a) Tiệm cận đứng : $x = 0$; tiệm cận xiên : $y = x - 3$; b) $x = 0$; $x = 2$; $y = x + 2$;

c) $x = 1$, $x = -1$, $y = x$; d) $x = -1$; $x = \frac{3}{5}$; $y = -\frac{1}{5}$; **36.** a) $y = x$ (khi $x \to +\infty$), $y = -x$ (khi $x \to -\infty$) ; b) $y = 3x$ (khi $x \to +\infty$), $y = x$ (khi $x \to -\infty$) ; c) $y = 2x$ (khi $x \to +\infty$) ; $y = 0$ (khi $x \to -\infty$) ;

d) $y = x + \frac{1}{2}$ (khi $x \to +\infty$), $y = -x - \frac{1}{2}$ (khi $x \to -\infty$).

37. a) $y = 2x$ (khi $x \to +\infty$) ;
$y = 0$ (khi $x \to -\infty$) ;

b) $y = x - 2$ (khi $x \to +\infty$) ;
$y = -x + 2$ (khi $x \to -\infty$) ;

c) $y = x$ (khi $x \to +\infty$) ;
$y = -x$ (khi $x \to -\infty$) ;

d) $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$.

38. a) $x = 3$; $y = x + 1$; b) $I(3; 4)$, $\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 4; \end{cases}$

c) $Y = X + \frac{5}{X}$. **39.** a) $I(-2; -3)$; $Y = X - \frac{2}{X}$;

b) $I(5; 2)$; $Y = X + \frac{4}{X}$. **40.** b) $y = -3x - 5$.

41. b) • $m < -1$ hoặc $m > 3$: 1 nghiệm ;
• $m = -1$ hoặc $m = 3$: 2 nghiệm ;
• $-1 < m < 3$: 3 nghiệm.

43. c) $y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3}$ và $y = -\frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3}$.

45. b) • $m < -2$ hoặc $m > 2$: 1 nghiệm
• $m = -2$ hoặc $m = 2$: 2 nghiệm ;
• $-2 < m < 2$: 3 nghiệm.

46. a) $m < -1$, $2 < m < 3$, $m > 3$. **48.** a) $m > 0$;

b) $y = -\frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12}$ và $y = \frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12}$.

53. b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$; c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$.

54. b) Đồ thị của hàm số $y = -1 + \frac{1}{x+1}$ là hình đối xứng của $(\mathcal{H})$ qua trục hoành.

55. b) $y = 3(x - 2)$. **56.** b) Giữ nguyên phần của $(\mathscr{C})$ nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

57. b) Hai giao điểm : $A(0\ ;\ 1)$, $B\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$;

c) Đường thẳng $y = 1$ là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ tại A ; phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ tại B, theo thứ tự, là $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ và $y = -2x + \frac{1}{2}$; d) Trên $\left(-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới $(\mathscr{P})$; trên $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ và $(0\ ;\ +\infty)$ $(\mathscr{C})$ nằm phía trên $(\mathscr{P})$.

58. b) • $m < 0$ hoặc $m > 12$; • $m < 0$.

60. $O(0\ ;\ 0)$; $y = \frac{3}{2}x$.

61. Tiếp điểm : $\left(\frac{v_0^2}{g\tan\alpha}\ ;\ \frac{v_0^2}{2g}(1 - \cot^2\alpha)\right)$.

63. c) $m < -3$ hoặc $-3 < m < 0$.

64. a) $a = -2$; $b = -3$.

65. b) $m < 4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m > 4 + 2\sqrt{6}$;

c) Phần của đường thẳng $y = 5x - 2$, với $x < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x > 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$. **66.** $a = -6$; $b = \frac{9}{2}$.

67. 1° a) $T(x) = 0{,}0001x^2 + 0{,}2x + 10000$;

b) $M(x) = 0{,}0001x + \frac{10000}{x} + 0{,}2$; $x = 10000$ (cuốn) ; 2°. b) $573 < x < 17427$; c) 9000 (cuốn) ; 71 triệu đồng. **70.** $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

71. Độ dài hai cạnh còn lại đều là 5cm.

73. a) $p < 0$. **74.** b) $y = -3x + 1$; c) $m > -3$.

75. b) $m = 9$, $m = \frac{1}{9}$.

78. b) Giao điểm của $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{H})$ là A(0 ; 1) ; c) Trên $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(0\ ;\ +\infty)$, $(\mathscr{P})$ nằm phía trên $(\mathscr{H})$; trên $(-1\ ;\ 0)$, $(\mathscr{P})$ nằm phía dưới $(\mathscr{H})$.

80. (B) **81.** (C) **82.** (D) **83.** (D) **84.** (A) **85.** (C) **86.** (B) **87.** (A) **88.** (C) **89.** (D) **90.** (B) **91.** (C) **92.** (A) **93.** (D) **94.** (B) **95.** (C) **96.** (B) **97.** (D) **98.** (A) **99.** (C) **100.** (D).

CHƯƠNG II

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai.

2. Điều kiện C. **3.** 2 ; 36 ; $\frac{25}{16}$; $\frac{12}{5}$.

4. a) $-\frac{80}{27}$; b) $\frac{116}{16}$; c) 12 ; d) 10.

5. a) ab ; b) $2a$.

6. a) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{63}$;

c) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

7. *HD* : $7 \pm 5\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^3$.

8. a) $\sqrt[4]{b}$; b) $2\sqrt[3]{ab}$; c) 1; d) $\sqrt{a}$.

10. a) *HD* : $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 1)^2$;

b) $9 \pm \sqrt{80} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$.

11. a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$; b) $3^{600} > 5^{400}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$; d) $7^{30} > 4^{40}$. **12.** Điều kiện B. **13.** Điều kiện C. **14.** Điều kiện $0 < a < 1$.

15. $\frac{1}{16}$; 4 ; 3. **16.** a ; a. **17.** ≈ 21,59 triệu đồng

18. a) $x^{\frac{7}{12}}$; b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-2}{15}}$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $a^{\frac{1}{4}}$.

19. a) a^3 ; b) a^2 ; c) $\dfrac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}$; d) $\left|x^\pi - y^\pi\right|$.

20. a) Khi $a \neq 1$ thì $\alpha = 0$; khi $a = 1$ thì α tuỳ ý ; b) $-3 < \alpha < 3$. **21.** a) $x = 1$; b) $x = 1$ và $x = 16$.

22. a) $|x| < \sqrt[4]{3}$; b) $x \geq \sqrt[11]{7}$; c) $\left[\begin{array}{l} x > \sqrt[10]{2} \\ x < -\sqrt[10]{2} \end{array}\right.$;

d) $x \leq \sqrt[3]{5}$. **23.** Khẳng định d).

24. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai.

25. a) $\log_a x + \log_a y$; $a > 0, a \neq 1$, $x > 0, y > 0$; b) $\log_a \dfrac{x}{y}$; $a > 0, a \neq 1, x > 0$, $y > 0$; c) $\alpha \log_a x$; $a > 0, a \neq 1, x > 0$;

d) b ; $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

26. a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$.

27. 1 ; 4 ; 0 ; −2 ; $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{3}{2}$. **28.** −3 ; 1 ; 3 ; −2.

29. 18 ; 32 ; $\dfrac{1}{125}$; 32. **30.** a) $x = 625$; b) $x = -3$; c) $x = 25$; d) $x = 5{,}5$. **31.** 1,65 ; 1,29 ; −0,13 ; −0,42. **32.** a) $\dfrac{4}{3}$; b) −2 ; c) $\dfrac{1}{2}$; d) 3.

33. a) $\log_3 4 > \log_4 \dfrac{1}{3}$; b) $3^{\log_6 1{,}1} > 7^{\log_6 0{,}99}$.

34 . a) $\log 2 + \log 3 > \log 5$;

b) $\log 12 - \log 5 < \log 7$;

c) $3\log 2 + \log 3 < 2\log 5$;

d) $1 + 2\log 3 > \log 27$.

35. a) 8 ; b) 11.

36. a) $x = a^4 b^7$; b) $x = a^2 . b^{-3}$.

37. a) $2\alpha + 2\beta - 2$; b) $2\alpha + \dfrac{1}{2}$.

38. a) 0 ; b) $\log 18\sqrt{2}$;

c) $20\log 2 - \dfrac{5}{2}\log 3$; d) $\log \dfrac{3}{16}$.

39. a) $x = 3$; b) $x = 7$; c) $x = 5^{-\frac{1}{8}}$.

40. M_{31} có 10 chữ số ; M_{127} có 39 chữ số ; $M_{1398269}$ có 420921 chữ số.

41. 4 năm 2 quý. **42.** Sai từ $\ln(2e) = \ln e + \ln e$.

43. $2a + 3b$; $4a - 2b$; $2b - 2a$; $-2a - 2b$.

45. 900 con ; 3 giờ 9 phút.

46. ≈ 82 235 năm.

47. a) $a \approx 863\ 188\ 841{,}4$; b) ≈ 52,5 mmHg.

48. a) $-3e^2$; b) −3. **49.** a) $y' = (2x-1)e^{2x}$;

b) $y' = \dfrac{2x\left[(x+1)e^{4x}+1\right]}{\sqrt{e^{4x}+1}}$;

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$; d) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

50. a) Đồng biến ; b) Nghịch biến.

52. Ta có bảng sau

STT	Loại âm thanh	$\dfrac{I}{I_0}$	độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	0 dB
2	Nhạc êm dịu	4000	36 dB
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6{,}8 \times 10^8$	88 dB
4	Tiếng máy bay phản lực	$2{,}3 \times 10^{12}$	124 dB
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	130 dB

53. a) 3 ; b) 0.

54. a) $y' = 3\ln^2 x + \dfrac{2(3x-2)\ln x}{x}$;

b) $y' = \dfrac{x\ln x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x}$;

c) $y' = \ln\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}$;

d) $y' = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

55. a) Nghịch biến ; b) Đồng biến.

57. (C_1) là đồ thị hàm số $y = x^{-2}$;

(C_2) là đồ thị hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$;

58. a) $y' = 2\pi(2x+1)^{\pi-1}$; b) $y' = \dfrac{3}{5x\sqrt[5]{\ln^2 5x}}$.

c) $y' = \dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

d) $y' = \left(\dfrac{x}{b}\right)^a \left(\dfrac{a}{x}\right)^b \dfrac{a-b}{x}$.

59. a) $\approx 0{,}91$; b) $\approx -2{,}61$.

61. a) $0 < x < 1$; b) $2 < x \le 8$.

62. a) $x \le 0$; b) $x > 2$.

63. a) $x = -\dfrac{1}{2}$. *Gợi ý* : $2 - \sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$;

b) $x \in \{0 ; 3\}$; c) $x = 1$; d) $x = 0$.

64. a) $x \in \{-1 ; 2\}$. b) $x = 2$. **65.** a) $k = 53$;

$a \approx 1{,}096$; b) $d \approx 25{,}119\log F - 43{,}312$.

c)

F	53	60	80	100	120	140	160
d	0	1,35	4,49	6,93	8,91	10,60	12

66. a) $x = 2$; b) $x = 6$.

67. a) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; b) $x = 9$.

68. a) $S = \{2 ; \log_3 2 - 1\}$; b) $x = 0$.

69. a) $S = \{10 ; \sqrt[9]{10}\}$; b) $S = \left\{2 ; \dfrac{1}{16}\right\}$;

c) $S = \{3^{-3} ; 3^{-0{,}8}\}$

70. a) $x = \log_{\frac{4}{3}}\left(\log_3 4\right)$; b) $x = 3^{-1}$;

c) $S = \{2 ; -(1 + \log_3 2)\}$; d) $S = \left\{5^{-1} ; \sqrt[6]{5}\right\}$.

71. a) $x = 1$; b) $x = 2$.

72. a) $S = \{(2;18) ; (18;2)\}$;

b) $(x ; y) = \left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$. **73.** a) $(x ; y) = (-2 ; 7)$;

b) $(x ; y) = \left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$. **74.** a) $x = -1$; b) $x = 0$;

c) $x = 100$; d) $x = 0$.

75. a) $S = \{\log_3 28 ; \log_3 82 - 4\}$;

b) $S = \left\{\dfrac{5}{4} ; 3\right\}$; c) $S = \{-2^{25} ; -1\}$;

d) $x = 4^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}}$. **76.** a) $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\dfrac{3}{2}$;

b) $x = e^{-2}$; c) $S = \{2 ; 16\}$; d) $S = \{2^{-7} ; 2\}$.

77. a) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; b) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. *Gợi ý* : Đặt $t = 4^{1+\cos 2x}$. **78.** a) $x = -1$; b) $x = 2$.

79. a) $(x ; y) = (-2 ; 0)$; b) $(x ; y) = (2 ; 5)$.

80. a) $x < 0{,}5$; b) $x > -\dfrac{3}{4}$.

81. a) $\dfrac{1}{3} < x < 2$; b) $\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{2}{5}$;

c) $S = [1 ; 2) \cup (3 ; 4]$; d) $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2}$.

82. a) $0{,}5 \le x \le 4$; b) $S = (0 ; 1)$;

83 a) $S = (-\sqrt{5} ; -2) \cup (1 ; \sqrt{5})$;

b) $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right)$; **84.** a) $p < q$; b) $p > q$; c) $p > q$; d) $q > p$. **85.** *Hướng dẫn :*

$$1 + \frac{1}{4}\left(2^x - 2^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2^x + 2^{-x}\right)^2.$$

86. a) $2^{10} = 1024$; b) $\frac{173}{60}$; c) $-n$.

87. *Hướng dẫn :*

$$\sqrt{\log_3 2.\log_3 4} < \frac{1}{2}\left(\log_3 2 + \log_3 4\right).$$

90. $S_{OAB} = \frac{1}{\ln^2 2} \approx 2{,}081$. **91.** a) $a > 1$;

b) $0 < a < 1$; c) $a > 1$; d) $0 < a < 1$.

92. $t \approx 3574$ (năm). **93.** a) $x = 10$; b) $x = -2$; c) $x = 1{,}5$; d) $x \in \{-1{,}5 ; -1\}$.

94. a) $x \in \left\{\frac{1}{16}; 2\right\}$; b) $x = 1$; c) $x = 13$; d) $x = 3$. **95.** $x = 1$.

96. a) $(x ; y) = (6 ; 2)$; b) $(x ; y) = (512 ; 1)$.

97. a) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$;

b) $(-\infty ; 0] \cup [\log_6 5 ; 1)$; c) $(4 ; +\infty)$.

98. (C) **99.** (D). **100** (B). **101.** (B).
102. (C) **103.** (C) **104.** (D)
105. (C). **106.** (D) **107.** (A)
108. (B) **109.** (C) **110.** (B).

CHƯƠNG III

1. a) $x^3 + \frac{x^2}{4} + C$; b) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$;

c) $\frac{-1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$; d) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$;

e) $\frac{10^{2x}}{2\ln 10} + C$. **2.** a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$;

b) $2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; c) $2x - \sin 2x + C$;

d) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C$. **3** (C). **4.** Đúng vì $-\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)$. **5.** a) $-6(1 - x^3)^{\frac{1}{2}} + C$;

b) $\frac{2}{5}\sqrt{5x + 4} + C$; c) $-\frac{2}{5}(1 - x^2)^{\frac{5}{4}} + C$;

d) $-\frac{2}{1 + \sqrt{x}} + C$.

6. a) $-2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C$;

b) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$;

c) $xe^x - e^x + C$; d) $\frac{1}{4}x^4\ln(2x) - \frac{x^4}{16} + C$

7. a) $-\frac{1}{3}(7 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} + C$. *HD :* Đổi biến $u = 7 - 3x^2$; b) $\frac{1}{3}\sin(3x + 4) + C$.

HD : Đổi biến $u = 3x + 4$; c) $\frac{1}{3}\tan(3x + 2) + C$.

HD : Đổi biến $u = 3x + 2$; d) $\frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{x}{3}\right) + C$.

HD : Đổi biến $u = \sin\frac{x}{3}$.

8. a) $\left(\frac{x^3}{18} - 1\right)^6 + C$. *HD :* Đổi biến $u = \frac{x^3}{18} - 1$;

b) $-\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{2} + C$.

HD : Đổi biến $u = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

c) $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$,

d) $\frac{2}{3}(\sqrt{3x - 9}\,e^{\sqrt{3x-9}} - e^{\sqrt{3x-9}}) + C$.

HD : Đổi biến $u = \sqrt{3x - 9}$.

9. a)

$\frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

b) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$; c) $\frac{1}{5}\sin^5 x + C$;

d) $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$. **10.** a) 21 ; b) 2,5 ; c) $\frac{9\pi}{2}$.

11. a) 10 ; b) –12 ; c) –2 ; d) 16.

12. 4. **14.** a) $\frac{3\pi}{4} - 1$; b) 1280 m.

15. $\frac{4300}{3}$ m. **16.** b) $\frac{625}{9,8} \approx 63,78$ (m).

17. a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. *HD* : Đổi biến $u = x + 1$;

b) $\frac{1}{2}$. *HD* : Đổi biến $u = \tan x$;

c) $\frac{15}{16}$. *HD* : Đổi biến $u = 1 + t^4$;

d) $\frac{1}{8}$. *HD* : Đổi biến $u = 4 + x^2$;

e) 4. *HD* : Đổi biến $u = 1 + x^2$;

f) $\frac{1}{6}$. *HD* : Đổi biến $u = 1 - \cos 3x$.

18. a) $\frac{32}{3}\ln 2 - \frac{7}{4}$; b) e ; c) $-\frac{1 + e^{\pi}}{2}$;

d) $\frac{\pi}{2} - 1$.

19. a) $I = \int_0^3 \sqrt{u}\,du = 2\sqrt{3}$; b) $\frac{\pi}{8}$.

HD : a) Đổi biến $u = t^5 + 2t$.

20. a) $I = \int_1^9 \frac{5}{4}u^{\frac{1}{4}}\,du = 9^{\frac{5}{4}} - 1$; b) $\frac{4}{3}$.

HD : a) Đổi biến $u = 5 - 4\cos t$.

21. (*B*) **22.** a) *HD* : Đổi biến $u = 1 - x$.

23. a) –3 ; b) 3.

24. a) $\frac{e^8 - e}{3}$. *HD* : Đổi biến $u = x^3$;

b) $I = \int_0^{\ln 3} u^2\,du = \frac{(\ln 3)^3}{3}$.

HD : Đổi biến $u = \ln x$;

c) $I = \int_1^4 \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{7}{3}$.

HD : Đổi biến $u = 1 + x^2$;

d) $I = \int_0^3 \frac{1}{9}e^u\,du = \frac{e^3 - 1}{9}$.

HD : Đổi biến $u = 3x^3$. e) $\ln 2$.

25. a) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$; b) $I = \int_0^{\ln 2} u\,du = \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

HD : Đổi biến $u = \ln(2 - x)$; c) $\frac{\pi^2}{4} - 2$;

d) $I = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$. *HD* : Đổi biến $u = x^3 + 1$; e) $\frac{2e^3 + 1}{9}$. **26.** $\frac{7\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

27. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{64}{15}$. **28.** a) $\frac{11}{3}$; b) 9 ; c) 44. **29.** $\frac{16}{3}$. **30.** $2\sqrt{3}$. **31.** $\frac{7\pi}{6}$. **32.** 3π.

33. 2π. **34.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{38}{15}$; c) $\frac{16}{3}$. **35.** a) $4\frac{1}{2}$; b) $\frac{17}{4}$; c) $\frac{22}{3}$. **36.** 8. **37.** $\frac{32\pi}{5}$. **38.** $\frac{\pi(\pi + 2)}{8}$.

39. $\pi(e - 2)$.

40. 2π. **41.** a) $x^2 + \frac{2}{x} + C$;

b) $4x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$; c) $-\frac{2}{3}\cos(x^{\frac{3}{2}} + 1) + C$.

HD : Đổi biến $u = x^{\frac{3}{2}} + 1$; d) $\dfrac{1}{2\cos(2x+1)} + C$.

HD : Đổi biến $u = \cos(2x + 1)$.

42. a) $-\sin\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) + C$.

HD : Đổi biến $u = \dfrac{1}{x} - 1$;

b) $\dfrac{(x^4 + 1)^4}{16} + C$. HD : Đổi biến $u = x^4 + 1$;

c) $\dfrac{xe^{2x}}{6} - \dfrac{e^{2x}}{12} + C$; d) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

43. a) $-e^{-x}(x + 1) + C$; b) $\dfrac{(\ln x)^2}{2} + C$.

HD : Đổi biến $u = \ln x$.

44. $f(x) = \dfrac{(3x^2 - 1)^4}{2} - 5$. **45.** $b = 1$. **46.** a) 2 ;

b) 9 ; c) –2 ; d) –6. **48.** $\dfrac{125}{6}$ m. **49.** 24 m/s.

50. a) $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2}$; b) 9 ; c) $\dfrac{e^3 - 1}{2}$. **51.** a) $\dfrac{9}{2}$;

b) $\dfrac{56}{15}$. **52.** a) 9 ; b) $\dfrac{9}{4}$. **53.** 4π.

54. 3π . **55.** π. **56.** 3π. **57.** a) 8π ; b) $\dfrac{32\pi}{5}$.

58. πe^2 **59.** a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) $\dfrac{4\pi}{7}$. **60.** (B) **61.** (B)
62. (D) **63.** (A) **64.** (B). **65.** (A) **66.** (A)
67. (C).

CHƯƠNG IV

3. $\pm i$, $\pm\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$.

4. $\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$; $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-2 - 3i$; $\dfrac{16}{17} - \dfrac{13}{17}i$.

5. $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 1 ; 0.

9. a) Đường tròn tâm I (biểu diễn số i) bán kính 1 ; b) Trục thực ; c) Đường trung trực đoạn thẳng nối O với điểm A biểu diễn số $3 + 4i$.

11. Thực ; Ảo ; Ảo. **12.** a) Trục ảo trừ điểm gốc ; b) Hợp hai đường phân giác của góc giữa trục thực, trục ảo ; c) Hợp trục thực và trục ảo ;

d) Trục ảo bỏ điểm I (biểu diễn số i).

13. a) $1 + 2i$; b) $-\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$; c) $\dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}i$;

d) $-i, -3i, 2 + 3i$; e) $\pm 2i$.

14. a) $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$, $\dfrac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$;

b) Trục ảo bỏ đoạn thẳng nối I, J (I biểu diễn i, J biểu diễn $-i$) ;

16. $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB} = |z'|$;

17. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$; $\pm\sqrt{2}(1 + i)$; $\pm 2i$;

$\pm(2 + \sqrt{3}i)$. **19.** a) $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; b) $-1 \pm 2i$;

c) $2i$; $-1 + i$.

20. b) $3 + i$, $1 - 2i$. **21.** a) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, i ;

b) $B = \pm(3 + i)$.

23. a) $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; c) $(1 \pm \sqrt{2})i$.

24. a) -1, $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$; b) $\pm 1, \pm i$;

c) $\pm(1 - i), \pm(1 + i)$; d) -1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}$.

25. a) $b = -2$, $c = 2$; b) $a = -4$, $b = 6$, $c = -4$.

26. b) $\pm\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$

$$= \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right).$$

27. a) $|kz| = |k|r$, acgumen của kz là φ nếu $k > 0$ và là $\varphi + \pi$ nếu $k < 0$ (sai khác $2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$).

28. d) $\sin\varphi + i\cos\varphi$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

29. $-2^9 = -512$. **30.** a) $1 + \sqrt{3}i$; b) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

32. $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$;

$\sin 4\varphi = 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi)$.

33. -2^6 ; $\frac{-1}{2^{1002}}$; 2^{21}.

34. n là bội nguyên dương của 3, không có m.

35. a) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

$\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

và $\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$.

b) $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

và $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

36. a) $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$;

b) $\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$.

c) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

nếu $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$;

$\left(-2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

nếu $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$.

37. a) -46 và -9 ; b) $\frac{23}{26}$ và $\frac{63}{26}$;

c) $y = 0$ hoặc $x = 1$.

39. a) $3i$; $-i$; b) $\frac{-1 + 5i}{2}$, $\frac{4 + 35i}{17}$;

c) $1 \pm 2i$, $-1 \pm i$.

40. b) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

41. a) $8(\sqrt{3} + i) = 16\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

b) $4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. **43.** (C) **44.** (A)

45. (A) **46.** (B) **47.** (B) **48.** (A) **49.** (B)

50. (C) **51.** (A) **52.** (B) **53.** (B) **54.** (B).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

2. c) $f(3,5)f(3,6) < 0 \Rightarrow 3,5 < \alpha < 3,6$.

4. 5 máy.

5. $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \frac{2}{5}$.

6. a) 1 ; b) $A > B$. **7.** b) $\frac{31 - 20\sqrt{3}}{3}$.

8. a) $y' = e^{2\tan x}\left(\frac{2}{\cos x} - \sin x\right)$; $y' = \frac{\cot x}{\ln 2}$.

10. a) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$;

b) $S = \left\{\frac{1}{16} ; 2\right\}$; c) $x = 10^{-2}$;

d) $S = \left\{\left(2 ; \frac{1}{6}\right)\right\}$. **11.** a) $2 < x < 3$;

b) $S = \left(-2 ; \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{21}}{2} ; 3\right)$.

12. a) $\dfrac{(1+x^4)^4}{16}+C$; b) $\dfrac{-3\cos x-\cos 3x}{6}+C$;

c) $\ln|\cos x| + x\tan x + C$.

13. $f(x) = 4x - 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+9$.

14. a) $\dfrac{\pi}{4}$. *HD* : Đổi biến $x = \tan t$;

b) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$. *HD* : Đổi biến $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$; c) $e - 2$.

15. a) $\dfrac{8}{3}$; b) $\dfrac{243}{8}$. **16.** a) $\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$.

17. $2i$; $3-i$; $1+4i$; $-1+3i$; $\dfrac{3-i}{2}$.

18. a) $4i\sqrt{3}$; b) 4 ; c) $16i$; d) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

20. Hình tròn tâm A bán kính 4 (A biểu diễn số $3+i\sqrt{3}$).

21. $\pm(1+3i)$; $\pm(2+i)$; $\pm(\sqrt{2}-i)$.

22. a) $1+i,\ 2-i$; b) $\cos\varphi,\ i\sin\varphi$.

23. -64 ; $\dfrac{i}{64}$.

24. (A) **25.** (C) **26.** (B) **27.** (B) **28.** (C) **29.** (D)
30. (C) **31.** (B) **32.** (B) **33.** (A) **34.** (D) **35.** (C)
36. (A) **37.** (C) **38.** (B).

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **TRẦN HỮU NAM – NGUYỄN NGỌC TÚ**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN NGỌC TÚ**
Biên tập kĩ – mĩ thuật : **ĐINH XUÂN DUNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN NGỌC TÚ**
Chế bản : **CÔNG TY CỔ PHẦN THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

GIẢI TÍCH 12 - NÂNG CAO

Mã số : NH201T0

In 100.000 cuốn (ST), khổ 17 x 24 cm.
In tại Công ty Cổ phần In Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. Số in: 77. Số xuất bản: 01-2010/CXB/758-1485/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2010.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

LONDON
QUALITY CROWN
QC 100
VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12

1. TOÁN HỌC
   - GIẢI TÍCH 12
   - HÌNH HỌC 12
2. VẬT LÍ 12
3. HOÁ HỌC 12
4. SINH HỌC 12
5. NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
6. LỊCH SỬ 12
7. ĐỊA LÍ 12
8. TIN HỌC 12
9. CÔNG NGHỆ 12
10. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 12
11. GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG - AN NINH 12
12. NGOẠI NGỮ
    - TIẾNG ANH 12 • TIẾNG PHÁP 12
    - TIẾNG NGA 12 • TIẾNG TRUNG QUỐC 12

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 - NÂNG CAO

Ban Khoa học Tự nhiên :
- TOÁN HỌC (GIẢI TÍCH 12, HÌNH HỌC 12)
- VẬT LÍ 12 • HOÁ HỌC 12 • SINH HỌC 12

Ban Khoa học Xã hội và Nhân văn :
- NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
- LỊCH SỬ 12 • ĐỊA LÍ 12
- NGOẠI NGỮ (TIẾNG ANH 12, TIẾNG PHÁP 12, TIẾNG NGA 12, TIẾNG TRUNG QUỐC 12)

8 934980 007587

Giá: 9.400đ