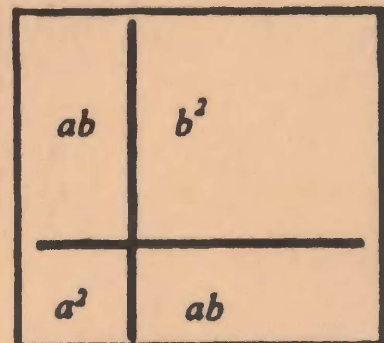
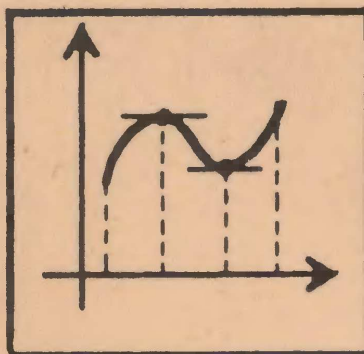


В.Ф.ОСИПОВ

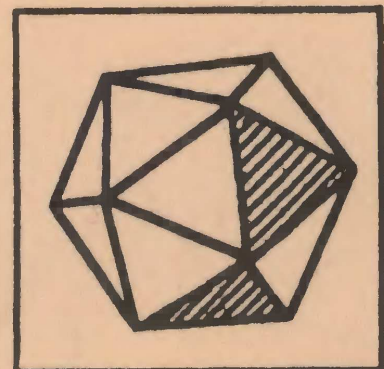
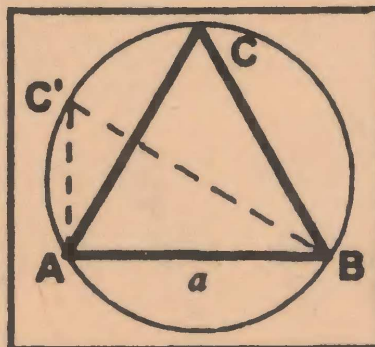
КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

С решениями и указаниями

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |



$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Ф. ОСИПОВ

**КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ
ПО МАТЕМАТИКЕ
С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО
С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2004

УДК [511+512+513+514+517.27](075)

ББК 22.1

О-74

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук *Н. М. Матвеев* (С.-Петербург. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена), канд. экон. наук *Г. Н. Парфенов* (С.-Петербург. ун-т экон. и фин.)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного университета*

Осипов В. Ф.

О-74 **Конкурсные задачи по математике: С решениями и указаниями:** Учеб. пособие. — 2-е изд. — СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. — 372 с.
ISBN 5-288-03454-0

В учебное пособие включены текстовые арифметические задачи, алгебраические задачи на решение уравнений, систем уравнений и неравенств, задачи на наибольшее и наименьшее значение, а также тригонометрические и геометрические задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в С.-Петербургском университете. Все они снабжены ответами и решениями. Сборник состоит из разных по трудности задач — от простых до нестандартных, дающих возможность составить полное представление об уровне требований на письменных экзаменах по математике на разных факультетах: математико-механическом, прикладной математики-процессов управления, физическом, химическом, геологическом, географическом, психологии, экономическом и биолого-почвенном.

Книга предназначена для самостоятельной подготовки к вступительным экзаменам. Пособие может быть полезно учителям средних школ, преподавателям вузов, а также любителям элементарной математики. Ил. 110.

ББК 22.1

© В. Ф. Осипов, 2004

© Издательство
С.-Петербургского
университета, 2004

ISBN 5-288-03454-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика состоит главным образом из фактов, которые можно представить и описать подобно любому явлению природы. Эти факты, сформулированные иногда явно – в виде теорем, иногда только упоминаемые по ходу доказательства или приводимые в качестве примеров, составляют основную часть приложений математики и будут существовать всегда, несмотря на изменчивость направлений ее развития, научных интересов исследователей и методов преподавания.

Обладать активными знаниями в области математики означает не только готовность приводить достаточно длинные списки математических формул или теорем и умение строго воспроизводить доказательства некоторых из них. Активность математического знания – это стремление и способность все осмыслить: сопоставить отдельные факты, связать новое со старым, непривычное – с обычным по аналогии, сложное разложить на части, найти применение общего правила к частному случаю, перейти от единичного факта к общей закономерности, создать целостное представление о математическом объекте и т.д.

Активное математическое знание нельзя получить как-то извне, его необходимо *выработать* самому, чтобы оно вошло в плоть и кровь и действовало с силой интуиции. К сожалению, по мнению одних, и к счастью, как думают другие, не существует каких бы то ни было готовых рецептов, предписывающих наиболее целесообразные пути освоения математического знания. Но действительно полезным и даже необходимым для развития математического мышления является его упражнение посредством самостоятельного решения задач.

”И тут в мой разум грянул блеск с высот,
Неся свершенье всех его усилий...”

– хочется сказать вместе с Данте.

Появление настоящего сборника ”Конкурсные задачи по математике” вызвано желанием ознакомить читателя, в основном будущих абитуриентов – школьников и учащихся подготовительных курсов, с задачами по элементарной математике,

предлагавшимися в течение ряда лет на вступительных экзаменах на разных факультетах Санкт-Петербургского университета. В этом сборнике представлены весьма разнообразные по трудности задания – от простых до нестандартных, дающие возможность составить полное представление об уровне требований на письменных экзаменах по математике на разных факультетах.

Сборник "Конкурсные задачи по математике" состоит из шести глав. Каждая глава соответствует программе по определенному разделу школьной математики, однако при решении отдельных задач допускается использование смешанных формулировок и методов. Например, некоторые алгебраические задачи удобнее решать геометрически, и, наоборот, ряд геометрических задач имеет наиболее простые алгебраические решения.

Все задачи снабжены ответом и решением. Отметим, что сначала предлагаются условия задач, а "Ответы и решения" помещены во второй части книги. Такое расположение материала позволяет активному читателю *самостоятельно* решать заинтересовавшие его задачи, не заглядывая в ответ или решение, и только в случае, когда такая попытка не увенчается успехом, посмотреть в ответ. Если же и после этого задача не будет решена, то следует прочитать ее решение.

В первой главе собраны задачи по арифметике. Здесь имеются текстовые задачи с разнообразными сюжетами. От школьника или абитуриента не требуется каких-либо навыков проводить длинные аналитические выкладки. В основном задачи этой главы предназначены для того, чтобы читатель научился переводить конкретное текстовое содержание на язык уравнений или систем уравнений. Как только уравнение составлено, его аналитическое решение уже не представляется трудным, да и ответ, как правило, выражается в целых числах.

Вторая глава посвящена алгебре. Алгебраические задачи на решение уравнений, систем уравнений и неравенств, включая уравнения и неравенства с параметром, обычно решаются путем последовательных преобразований уравнения или неравенства в уравнение или неравенство простейшего вида. Однако такие преобразования часто приводят к появлению посто-

ронных решений, поэтому следует обращать особое внимание на определение области допустимых значений (ОДЗ) или на проверку полученных решений. Кроме того, в некоторых из предложенных задач удобно перейти к подходящей новой неизвестной.

Задачи на наибольшее и наименьшее значение, собранные в третьей главе, обычно решаются по следующей схеме. Во-первых, переменную величину y , для которой требуется условием задачи найти наибольшее или наименьшее значение по сравнению с ее возможными значениями, необходимо связать с другой переменной величиной x функциональной зависимостью $y = f(x)$ и определить пределы изменения независимой переменной x . Во-вторых, используя дифференциальное исчисление, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри промежутка изменения указанной переменной. Наконец, следует вычислить значения функции в этих точках и на концах промежутка и из всех полученных таким образом чисел выбрать наибольшее или наименьшее значение. В случае, если функция $y = f(x)$ является достаточно простой, нахождение ее экстремального значения на данном промежутке можно провести элементарно, т.е. без использования понятия производной.

Задачи, представленные в четвертой главе, это в основном задачи на решение тригонометрических уравнений. Однако предлагаются также отдельные задачи на решение систем тригонометрических уравнений и неравенств. При решении тригонометрических задач необходимо отчетливо представлять решения простейших тригонометрических уравнений. Например, если $\sin x = a$ и $|a| \leq 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), а уравнение $\cos x = a$ имеет решение $x = \pm \arccos a + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Кроме того, читатель должен располагать основными формулами преобразования тригонометрических выражений: формулами значений тригонометрических функций суммы или разности аргументов, формулами тригонометрических функций удвоенного угла и т.д. Следует также иметь в виду, что при решении тригонометрических задач иногда полезно рассматривать новые неизвестные величины, для которых исходные уравнения становятся алгебраи-

ческими, поэтому читатель должен обладать определенными навыками в решении соответствующих алгебраических задач.

Наконец, главы пятая и шестая посвящены геометрии – планиметрии и стереометрии. Следует отметить, что уже в третьей главе имелись отдельные геометрические задачи, но там основная трудность их решения заключалась в нахождении экстремального значения. Здесь же все задачи требуют вычисления той или иной геометрической величины с помощью соответствующих аналитических выкладок. Однако решение геометрической задачи полезно начинать с построения рисунка, на котором необходимо изобразить не только элементы, заданные условием или подлежащие определению, но и некоторые вспомогательные. Как правило, ясное, наглядное представление условия задачи существенно помогает в составлении плана дальнейших аналитических вычислений с помощью известных читателю теорем и формул.

Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, на сколько сможете и на сколько это потребуется вам, чтобы их было легко решить.

Р. Декарт. Рассуждение о методе. Избр. соч. М., 1950. 272 с.

ГЛАВА 1. АРИФМЕТИКА. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Сколькими способами 10 одинаковых подарков можно распределить между 6 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

2. Сколькими способами 3 одинаковые игрушечные машины и 5 одинаковых кукол можно распределить между 7 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы одну игрушку?

3. В 10 урнах распределены 6 белых и 6 черных одинаковых по размеру шаров, причем в каждой урне имеется хотя бы один шар. Сколько существует различных вариантов распределения шаров?

4. В 6 урнах распределены 3 белых и 4 черных одинаковых по размеру шаров, причем в каждой урне либо нет шаров, либо имеются шары только одного цвета. Сколько существует различных вариантов таких распределений?

5. Сколько существует целых положительных чисел, меньших, чем 10000, в записи которых в десятичной системе все цифры разные?

6. Сколько существует целых положительных чисел, меньших, чем 10000, в записи которых в десятичной системе любые две соседние цифры разные?

7. Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по k ящикам?

8. Сколькими способами можно разместить n белых и n черных (одинаковых по размеру) шаров по k ящикам так,

чтобы в каждом ящике находился или один шар или два разноцветных шара?

9. Определить год рождения одного из основоположников науки нового времени, если известно, что сумма цифр года его рождения равна 21. Если же к году рождения прибавить 5355, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

10. Определить год рождения великого русского ученого, если известно, что сумма цифр года его рождения делится на 5. Если же к году рождения прибавить 7452, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

11. Один рабочий может изготовить 60 деталей на 1 ч 20 мин быстрее, чем другой. Сколько деталей изготавливает за час каждый рабочий, если известно, что вместе они изготавливают 120 деталей за 2 ч 30 мин?

12. Двое рабочих изготавливают 50 деталей за 6 часов. За сколько минут изготавливает одну деталь каждый из рабочих, если известно, что один рабочий изготавливает одну деталь на 6 мин скорее, чем другой?

13. Одна бригада лесорубов может заготовить 40 м^3 дров на 3 часа быстрее, чем другая. За какое время может заготовить 20 м^3 дров каждая бригада, работая отдельно, если известно, что при совместной работе они могут заготовить 65 м^3 дров за 5 часов?

14. Одна бригада грузчиков разгружает вагон на 1 ч 36 мин быстрее, чем другая. Работая вместе, они могут разгрузить вагон за 1 ч 30 мин. За какое время разгружает вагон каждая бригада, работая раздельно?

15. Один завод может выполнить заказ на 4 дня скорее, чем другой. За какое время этот заказ может выполнить каждый из них, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполняют заказ, в 5 раз больший?

16. Чан наполняется через два крана A и B . Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем наполнение через кран B . Если же открыть оба крана, то чан

наполнится за 60 мин. За какое время чайн наполняется через каждый кран в отдельности?

17. Бригада выполняла производственное задание на 98 %. Увеличение производительности каждого рабочего на $1/20$ по сравнению с плановой позволило, высвободив 3 человека для других работ, выполнять задание на 132 %. Сколько человек было в бригаде?

18. Одна бригада изготовила за смену 65 деталей, другая, в которой на два человека больше, — 120 деталей. Каждый рабочий второй бригады изготовлял за смену на 3 детали больше, чем рабочий первой. Определить число рабочих в каждой бригаде.

19. Танкер заполняется нефтью с помощью 5 труб. Если производительность каждой трубы уменьшить на $8 \text{ м}^3/\text{мин}$, а число труб увеличить на 2, то время заполнения танкера не изменится. Определить первоначальную производительность трубы.

20. Грузовое судно разгружается 6 кранами. Если производительность каждого крана увеличить на 20 т/час, а число кранов уменьшить на 2, то время разгрузки судна не изменится. Определить первоначальную производительность одного крана.

21. Бригада лесорубов должна заготовить 400 м^3 дров. Эту работу лесорубы выполнили на 3 дня раньше, так как ежедневно заготавливали на 30 м^3 дров больше, чем планировалось. Сколько дров заготавливала бригада ежедневно?

22. Фермерское хозяйство должно было вспахать 900 га пашни с помощью 6 тракторов. Увеличив число тракторов в 2 раза, а ежедневную производительность каждого трактора на 2,5 га, фермерское хозяйство выполнило всю работу на 9 дней раньше, чем планировалось. За сколько дней фермерское хозяйство выполнило эту работу?

23. В экспериментальном цехе научно-производственного объединения изготовлена машина для разделки рыбы. Опытная эксплуатация ее на плавающей базе показала, что она по-

звоняет разделять в минуту на 15 шт. рыбы больше, чем на старом оборудовании. Сколько штук рыбы разделяет в минуту новая машина, если известно, что улов в 26 000 шт. она обработала на 1 ч 15 мин быстрее, чем раньше?

24. На автозаводе расход металла на каждый автомобиль уменьшен на 80 кг. В результате из 15 960 кг металла изготовлено на 2 автомобиля больше, чем раньше. Сколько металла потребуется для изготовления одного автомобиля?

25. Рабочий за несколько дней должен изготовить 260 деталей. Первые 2 дня он работал по плану, а в последующие дни изготавливал ежедневно на 10 деталей больше, чем это предусматривалось планом. Поэтому уже за 2 дня до срока было изготовлено 268 деталей. Сколько деталей должен изготавливать рабочий по плану за один день?

26. На заводе разработали новый тип деталей для электромоторов. В результате из 600 кг металла стали изготавливать деталей нового типа на 25 шт. больше, чем изготавливали деталей старого типа из того же металла. Какова масса детали нового типа, если 2 детали нового типа на 10 кг легче одной детали старого типа?

27. Первая бригада грузчиков может разгрузить 8 товарных вагонов на 1 час быстрее, чем вторая бригада. Если 7 вагонов будут разгружать обе бригады, работая вместе, а последний вагон будет разгружать только вторая бригада, то на выполнение всей работы потребуется 2 часа. За какое время может выполнить работу каждая из бригад, работая отдельно?

28. Работая совместно, два подъемных крана разгружают товарный состав за 3 ч 44 мин. За какое время может разгрузить состав каждый кран, работая отдельно, если один из них может разгрузить состав на 1 час скорее, чем другой?

29. Две бригады, работая вместе, убрали картофель с поля за 2 часа. На следующий день работала только одна бригада на таком же поле. Проработав 2 часа, рабочие убедились в том, что им осталось затратить только двенадцатую часть от времени, в течение которого может убрать картофель

со всего поля вторая бригада. За какое время первая бригада убрала картофель со второго поля?

30. С двух полей нужно было собрать 20 т свеклы. На каждом поле работала одна бригада. Одновременно начав работу и собрав 20 т свеклы с обоих полей, бригады одновременно ушли на обед. После обеда каждая бригада работала на своем поле, причем первая окончила работу на 2 ч 40 мин раньше второй бригады. Сколько свеклы собирала в час первая бригада, если известно, что она собирала в час на 2 т свеклы больше, чем вторая?

31. В прошлом году зерноочистительными комплексами района обработано 240 тыс. т товарного зерна. В текущем году предстоит обработать 285 тыс. т, поэтому дополнительно было смонтировано еще 9 комплексов. Сколько имеется в районе зерноочистительных комплексов, если известно, что производительность каждого из них равна 100 т/ч, а урожай этого года можно обработать на 36 ч быстрее, чем в прошлом году?

32. Район выращивает зерновые на 36 тыс. га, а в будущем площади под зерновыми увеличатся на 10 %. В связи с увеличением посевных площадей район запланировал закупить еще 60 комбайнов. Сколько имеется в районе комбайнов, если известно, что в будущем нагрузка на каждую машину уменьшится на 10 га?

33. На ферме имеются две теплицы. В первой теплице урожай составил 1080 кг помидоров, а во второй – 980 кг, причем во второй с 1 м^2 собрали на 2 кг помидоров больше, чем с той же площади в первой, при этом площадь второй теплицы на 20 м^2 меньше площади первой. Какова площадь каждой теплицы?

34. На ферме имеются две теплицы общей площадью 160 м^2 . В первой теплице собрали 1800 кг огурцов, а во второй – 1320 кг, причем во второй с 1 м^2 собрали на 4 кг огурцов больше, чем с той же площади в первой. Сколько огурцов собрали с 1 м^2 в той и другой теплице?

35. Имеются два кольца. Первое содержит золото и серебро в отношении 2:3, а второе – 9:1. Если кольца расплавить, то в каком отношении нужно взять сплавы первого и второго колец, чтобы получить новое кольцо с отношением золота к серебру 7:3?

36. Имеются два разных сплава меди. Массовая доля меди в первом сплаве на 30 % меньше, чем во втором сплаве. После того, как их сплавляли вместе, получили сплав, содержащий 44 % меди. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что меди в первом сплаве было 8 кг, а во втором – 14 кг.

37. Вычислить массу и пробу сплава серебра с медью, если известно, что сплав его с 100 г чистого серебра имеет 0,7-ю пробу, между тем как сплавив его с 100 г сплава 0,4-й пробы, получают сплав 0,6-й пробы. (Проба сплава есть отношение массы благородного металла к общей массе сплава.)

38. Два слитка серебра с медью имеют одинаковую массу. Каждый из них сплавляют с количеством меди, содержащимся в другом. В результате получают два новых слитка, соотношение масс которых равно 6:7, а соотношение проб – 7:8. Какова первоначальная проба каждого слитка? (Проба сплава есть отношение массы благородного металла к общей массе сплава.)

39. В лаборатории имеется смесь, общая масса которой на 3,3 кг больше массы содержащегося в ней титана. Определить общую массу смеси и массовую долю (в %) в ней титана, если известно, что при добавлении 2 кг новой смеси с 25 % титана получается смесь с массовой долей титана 20 %.

40. В лаборатории имеются два ящика порошка. Известно, что порошок в одном ящике содержит 20 % железа, а в другом – 12 %. Сколько требуется взять порошка из каждого ящика, чтобы получить 3,2 кг порошка, содержащего 15 % железа?

41. В лаборатории имеются два одинаковых ящика порошка, содержащего p % висмута. Из каждого ящика израс-

ходовали по 2 кг порошка, а затем добавили столько же нового порошка, причем в первый ящик добавили порошок, содержащий $q\%$ висмута, а во второй – $3q\%$ висмута. В результате во втором ящике оказалось в 1,5 раза больше висмута, чем в первом. Какова первоначальная массовая доля висмута в каждом ящике?

42. В лаборатории имелось 5 кг смеси, содержащей фосфор. Израсходовав 2 кг смеси, добавили столько же второй смеси, содержащей $p\%$ фосфора. После перемешивания снова израсходовали 2 кг и добавили столько же второй смеси. В результате получилась смесь, содержащая $q\%$ фосфора. Определить массовую долю (в $\%$) фосфора в первоначальной смеси.

43. Имеются две разные смеси медного купороса с другими веществами. Массовая доля медного купороса в первой смеси на 15% меньше, чем во второй смеси. После того как их смешали вместе, получилась смесь, содержащая 40% медного купороса. Определить массовую долю (в $\%$) медного купороса в первой и второй смесях, если известно, что медного купороса в первой смеси было 3 г, а во второй – 9 г.

44. Имеются две порции одного и того же вещества, играющего роль катализатора. В присутствии 1-й порции реакция в сосуде происходит на 6 мин дольше, чем в присутствии 2-й порции. Если же в сосуд бросить обе порции катализатора, то реакция происходит в течение 4 мин. Определить время продолжения реакции в присутствии каждой порции катализатора, если известно, что скорость реакции пропорциональна массе присутствующего в сосуде катализатора.

45. Из сосуда емкостью v литров, наполненного p -процентным раствором кислоты, отлили некоторое количество раствора и добавили такое же количество q -процентного раствора ($q < p$). Крепость полученного раствора оказалась в k раз меньше крепости раствора, который получится, если при переливании вместо q -процентного раствора использовать раствор в два раза большей крепости. Сколько было израсходовано q -процентного раствора?

46. Сосуд наполнен p -процентным раствором кислоты. Из него отлили a литров и добавили то же количество q -процентного раствора кислоты ($q < p$). После перемешивания эту операцию повторили еще один раз, после чего получился r -процентный раствор. Найти объем сосуда.

47. При использовании гальванического элемента в начальный момент водный раствор содержал 15 г сульфата кадмия. В течение некоторого времени при окислении кадмия суточное увеличение сульфата кадмия составляло в среднем 4 %, но затем суточное увеличение сульфата кадмия уже возросло в среднем до 5 %. Определить продолжительность второго промежутка времени, когда увеличение сульфата кадмия составляло 5 %, если известно, что он длился на $1/2$ суток дольше первого и за это время в водном растворе сульфата кадмия увеличилось на 2,475 г.

48. В начальный момент использования гальванического элемента один из внутренних электродов содержал 20 г чистой ртути. В результате восстановления в течение первых суток увеличение чистой ртути было на 5 % меньше по сравнению с процентным увеличением чистой ртути в течение вторых суток. Определить процентное увеличение массы чистой ртути в течение первых суток, если известно, что в течение вторых суток масса чистой ртути увеличилась на 1,648 г.

49. Из городов A и B , расстояние между которыми равно 600 км, выходят одновременно два поезда навстречу один другому. Через 6 часов расстояние между этими поездами составляло 60 км. Если бы поезд из B вышел на полтора часа раньше, чем поезд из A , то поезда встретились бы на середине пути. Найти скорость движения каждого поезда.

50. Расстояние между станциями A и B равно 120 км. Через 2 часа после отправления со станции A поезд вынужден был остановиться в пути на 20 мин, а остальной путь шел со скоростью на 6 км/ч больше первоначальной, поэтому пришел на станцию B без опоздания. Определить первоначальную скорость поезда.

51. Из городов A и B , расстояние между которыми равно 180 км, отправлены одновременно навстречу друг другу два поезда. После их встречи поезд, вышедший из города A , прибывает в город B через 2 ч, а другой прибывает в город A через 4 ч 30 мин. Найти скорость каждого поезда.

52. Расстояние между двумя городами равно 480 км. Пассажирский поезд проходит его на 4 ч быстрее, чем товарный. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 км/ч, а скорость товарного – на 2 км/ч, то пассажирский поезд пройдет все расстояние на 5 ч быстрее товарного. Найти скорость обоих поездов.

53. Из пунктов A и B одновременно отправились две машины. Одна шла из A в B , другая – из B в A . После встречи на оставшийся путь одной из машин потребовалось в 6 раз меньше времени, чем у другой ушло на весь путь. Найти отношение скоростей машин.

54. Автобус и троллейбус ходят по общему маршруту длиной 20 км. Скорость автобуса на $\frac{10}{3}$ км/ч больше скорости троллейбуса. Автобус и троллейбус одновременно вышли из разных концов маршрута. Пройдя весь маршрут, троллейбус сразу поворачивает обратно, а автобус – после десятиминутной стоянки. На обратном пути они встретились в том же месте, что и в первый раз. Определить скорости автобуса и троллейбуса.

55. Из пункта A в пункт B , отстоящий от A на 360 км, с некоторой постоянной скоростью отправился автомобиль. Затем он выехал обратно со скоростью, на 15 км/ч большей, и возвратился в пункт A , затратив на 2 ч меньше, чем на поездку из пункта A в пункт B . Найти первоначальную скорость автомобиля.

56. Из пункта A в пункт B , отстоящий от A на 75 км с некоторой постоянной скоростью отправился велосипедист. Затем он выехал обратно с той же скоростью, но через 2 ч после выезда из пункта B был вынужден остановиться на 45 мин. После этого велосипедист продолжил путь, увеличив скорость на 5 км/ч. Найти первоначальную скорость велосипедиста,

если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько и на путь от пункта A до пункта B .

57. Из одного города в другой вылетел самолет. Если бы скорость самолета была на 130 км/ч меньше фактической, то он прибыл бы к месту назначения с опозданием на 1 ч 6 мин. Определить фактическую скорость самолета, если расстояние между городами равно 2860 км.

58. Из одного города в другой вышел поезд. Если после прохождения половины пути скорость его увеличить на 12 км/ч, то он прибудет к месту назначения на 25 мин раньше. Определить начальную скорость поезда, если расстояние между городами равно 300 км.

59. Два мотоциклиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость первого из них 40 км/ч, второго — 50 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта вслед за мотоциклистами выехала автомашина, которая догнала второго мотоциклиста через $1,5$ ч после того, как обогнала первого. Найти скорость автомашины, если ее движение (и движение мотоциклистов) равномерное.

60. Каждый из двух велосипедистов, которые одновременно выехали из пункта A в пункт B , достигнув B , сразу же поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго при движении от A к B , встречает его на обратном пути на расстоянии 20 км от B , затем, приехав в A и повернув обратно, он встречает второго велосипедиста на половине пути от A до B . Найти расстояние между пунктами A и B , если движение велосипедистов равномерное.

61. Желая попасть в пункт B в определенное время, автомобилист выехал из пункта A со скоростью 64 км/ч. В течение 3 ч он ехал с указанной скоростью. Затем "пробка" на дороге заставила его остановиться. Простояв 50 мин, автомобилист решил проехать в пункт B объездным путем, что увеличило его путь на 31 км. В результате он приехал в пункт B с опозданием на 1 ч 5 мин, хотя следовал вторую часть пути со скоростью, на 6 км/ч большей, чем вначале. Найти

расстояние между пунктами A и B по той дороге, по которой автомобилист выехал в пункт B .

62. Дорога из пункта A в пункт B состоит из горизонтального участка, равного 50 км, подъемов и спусков, причем длина подъемов составляет $9/14$ длины спусков. Велосипедист, скорость которого равна 24 км/ч на горизонтальном участке пути, 30 км/ч на спусках и 15 км/ч на подъемах, проехал из пункта A в пункт B , отдыхая в пути 30 мин. На следующий день он возвратился из пункта B в пункт A , отдыхая в пути 40 мин. Известно, что во второй день велосипедист затратил на дорогу на 30 мин больше, чем в первый. Найти расстояние между пунктами A и B .

63. Мотоциклист отправляется из пункта A в пункт B и после 15-минутной стоянки в B возвращается в A . В момент отправления мотоциклиста навстречу ему из B выходит пешеход со скоростью, в 10 раз меньшей, чем у мотоциклиста. Пешеход встречается с мотоциклистом в 15 часов. Кроме того, направляясь из B в A , мотоциклист догоняет пешехода в 15 ч 30 мин. Определить время прибытия пешехода в пункт C , находящийся на полпути между A и B .

64. Велосипедист отправляется из пункта A в пункт B и после 15-минутного отдыха в B возвращается в A . На пути из A в B велосипедист в 11 часов догоняет пешехода, который движется из A в B со скоростью, в 4 раза меньшей, чем у велосипедиста. В 12 часов произошла их вторая встреча. Определить время отправления велосипедиста из A , если известно, что велосипедист возвращается в A одновременно с прибытием пешехода в B .

65. Между двумя портами курсирует грузовое судно, скорость которого линейно зависит от массы перевозимого груза. При загрузке 2000 т скорость его в 3 раза меньше, чем при загрузке 1000 т. Известно, что в первом случае судно проходит расстояние между портами за 25 ч. За какое время оно пройдет это расстояние при наибольшем грузообороте? Какова при этом его загрузка? (Грузооборот есть произведение массы перевозимого груза на скорость судна.)

66. Скорость товарного поезда линейно зависит от числа его вагонов, а скорость состава из 60 вагонов равна $\frac{2}{3}$ скорости состава из 40 вагонов. Паровозная бригада выполняет план перевозок на 100 % при наибольшем грузообороте. (Грузооборот есть произведение числа вагонов на скорость поезда.) На сколько процентов выполняет план перевозок паровозная бригада, составляя товарный поезд из 40 вагонов?

67. Разница в цене двух кусков ткани одинаковой длины составляет 34 руб. 40 коп. Известно, что цена 5 м более дорогой ткани на 13 руб. больше цены 3 м более дешевой ткани, а 4 м более дорогой ткани и 2 м более дешевой ткани вместе стоят 30 руб. 20 коп. Найти длину обоих кусков и определить цену 1 м каждой ткани.

68. Два куска ткани стоят 496 руб. 40 коп. Цена 5 м более дешевой ткани на 40 коп. больше цены 4 м более дорогой, а 4 м более дешевой ткани и 5 м более дорогой вместе стоят 52 руб. 80 коп. Известно также, что дешевой ткани имеется на 4 м больше, чем дорогой. Найти длину обоих кусков.

69. В математической модели отбора популяций частоты x , y генов a , b соответственно преобразуются в новые частоты

$$x_1 = \frac{x(Ax + By)}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}, \quad y_1 = \frac{y(Bx + Cy)}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

генов a , b следующего поколения, где A , B , C – коэффициенты приспособленности генотипов. При $A = B$ и равенстве частот в нулевом поколении найти отношение $C : A$, если известно, что во втором поколении на каждые 5 генов a приходится 12 генов b .

70. Частоты x , y генов a , b соответственно преобразуются в результате одного тура отбора в новые частоты

$$x_1 = \frac{x(kx + y)}{kx^2 + 2xy + ky^2}, \quad y_1 = \frac{y(x + ky)}{kx^2 + 2xy + ky^2}$$

генов a , b следующего поколения. Определить первоначальные частоты, если известно, что коэффициент приспособлен-

ности $k = \frac{1}{2}$, а в следующем поколении на каждые 40 генов a приходится 33 гена b .

71. Вдоль морского берега прямолинейно движется судно со скоростью v . При прохождении им устья реки, впадающей в море под прямым углом, спускающийся вниз по реке катер находился на расстоянии a от морского берега. С какой скоростью должен двигаться катер, чтобы наименьшее сближение с судном (по прямой) произошло как можно позже?

72. В озере на расстоянии $2a$ от берега сидит глупый крокодил, который может двигаться только по прямой со скоростью v . Крокодила подстерегают три акулы, расположившиеся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a , в центре которого находится крокодил. При каком соотношении между скоростью акул v_a и скоростью v крокодил сможет удрать на берег?

Я занимался до сих пор решением ряда задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил.

И. Ньютон. Всеобщая арифметика. М., 1948. С. 243.

ГЛАВА 2. АЛГЕБРА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решить уравнения:

1. $\sqrt{3+x} + \sqrt{18+x} = 3\sqrt{5}$.

2. $\sqrt{3+x} + \sqrt{24+x} = 3\sqrt{7}$.

3. $\sqrt{7-10x} + \sqrt{13-10x} = 6\sqrt{1-x}$.

4. $\sqrt{10x+1} + \sqrt{10x+19} = 6\sqrt{x+1}$.

5. $\sqrt{2+x-x^2} = 1-2x$.

6. $\sqrt{x^2-3x+2} = 2x-1$.

7. $4x + \sqrt{(6-x)(7-3x)} = 0$.

8. $2(2-x) = \sqrt{24+2x-x^2}$.

9. $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} = x$.

10. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x}{2}$.

11. $18x^2 + \frac{2}{x^2} = 16 - 3x - \frac{1}{x}$.

12. $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 2x + 6 - \frac{1}{x}$.

13. В уравнении $2x^2 - ax + 1 = 0$ определить a таким образом, чтобы корни уравнения были действительными, а сумма квадратов корней равнялась $2a$.

14. В уравнении $3x^2 + ax + 2 = 0$ определить a таким образом, чтобы корни уравнения были действительными, а сумма кубов корней равнялась удвоенной их сумме.

15. При каких значениях a число 1 лежит между корнями уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$?

16. При каких значениях b число -4 лежит между корнями уравнения $x^2 + 2bx + 2b^2 - 4b = 0$?

17. В зависимости от значений параметра a расположить в порядке возрастания числа 4, 1 и корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$.

18. В зависимости от значений параметра b расположить в порядке убывания числа -4 , 0 и корни уравнения $x^2 + 2bx + 2b^2 - 4b = 0$.

19. Вычислить отрицательный коэффициент b и корни уравнения $x^2 + bx - 1 = 0$, если известно, что с увеличением каждого из этих корней на единицу они становятся корнями уравнения $x^2 - b^2x - b = 0$.

20. Вычислить положительный коэффициент b и корни уравнения $x^2 + bx - 2 = 0$, если известно, что с уменьшением каждого из этих корней на единицу они становятся корнями уравнения $x^2 + b^2x + b - 1 = 0$.

21. Определить a так, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения $2 \log_a |x - 1| - \log_a x = 1$ равнялась 34.

22. Определить a так, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения $\log_a |x - 2a| + \log_a x = 2$ равнялась 4.

23. Решить уравнение $\sqrt{4a + b - 5x} + \sqrt{4b + a - 5x} = 3\sqrt{a + b - 2x}$ при всех значениях параметров a и b .

24. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - a + 4} + \sqrt{x^2 + 2a + 16} = 6$ при всех значениях параметра a .

25. Решить уравнение $4x^4 - x^2 + 4ax - 4a^2 = 0$ при всех значениях параметра a .

26. Решить уравнение $9x^4 - x^2 + 2ax - a^2 = 0$ при всех значениях параметра a .

27. Решить уравнение $\sqrt[3]{x + a} - \sqrt[3]{x + b} = 1$ при всех значениях параметров a и b .

28. Решить уравнение $\sqrt[3]{a+x^3}-x=b$ при всех значениях параметров a и b .

29. Решить уравнение $\sqrt{\frac{x+a}{x+2}} = \sqrt{x-a}$ при всех значениях параметра a .

30. Решить уравнение $2\sqrt{x+a} = \sqrt{(x-a)(x+3)}$ при всех значениях параметра a .

Решить уравнения:

31. $\log_3(x+1) \cdot \log_{\sqrt{x+3}} 3 = 1.$

32. $\log_5(x-2) \cdot \log_{\sqrt{x+10}} 5 = 1.$

33. $\log_{(x+1)}(1-3x) = -1 + \log_{\sqrt{1-3x}}(1-2x-3x^2).$

34. $\log_{\sqrt{3x-2}}(2-x) = -2 + \log_{(2-x)}(8x-3x^2-4).$

35. $2 + \log_{\sqrt{2x-3}}(3-x) = \log_{(3-x)}(9x-2x^2-9).$

36. $\log_{(2+x)}(7x^2+22x+16) = 2 + \log_{\sqrt{8+7x}}(2+x).$

37. $1 + \log_{(x-2)}(4x-11) = 2 \log_{(4x-11)}(4x^2-19x+22).$

38. $1 + \log_{(x+2)}(3x+10) = \log_{\sqrt{3x+10}}(3x^2+16x+20).$

39. $\log_{\sqrt[3]{x}}(2x+1) = 1 + \log_{\sqrt{2x+1}}(2x^4+x^3).$

40. $\log_{\sqrt{1-3x}}(1-x) = 4 - \log_{(1-x)}(1-4x+3x^2).$

41. $\log_{\sqrt{3x-5}}(3-x) = -2 + \log_{(3-x)}(14x-3x^2-15).$

42. $\log_{(x-2)}(10-3x) = -1 + \log_{\sqrt{10-3x}}(16x-3x^2-20).$

43. $\log_{\sqrt{x+1}} x + \log_x(x+1)^2 = 5.$

44. $\log_{\sqrt{x}}(1-2x) + \log_{(1-2x)} x = 3.$

45. $\frac{5}{3 + \log_2 x} = 2 + \log_{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \right).$

$$46. \quad \frac{11 \log_x 3 - 1}{\log_3 x - 2} = 2 + \log_{\sqrt{x}} 3.$$

$$47. \quad 2x - \log_{1/5}(2^{2x} + 3x - 9) = \log_5 10^{2x}.$$

$$48. \quad 7x - \log_{1/3}(5^{7x} + 4x + 8) = \log_3 15^{7x}.$$

$$49. \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2^2 x + 1} = 9^{2 - \log_2 x^3}.$$

$$50. \quad \log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$$

$$51. \quad 2 \log_{x/27} 3 \cdot \log_{9x} 3 = \log_{x/81} 3.$$

$$52. \quad 2x + \log_3 \left(\frac{10}{3^x} - 1 \right) = 2.$$

$$53. \quad (0, 4)^{\log_2^2 x + 1} = (6, 25)^{2 - \log_2 x^3}.$$

$$54. \quad (0, 8)^{\log_3^2 x - 2 \log_3 x} = (1, 25)^{-6 + \log_3 x}.$$

$$55. \quad \log_2 \sqrt{9 - 2^{3x+1}} + \frac{3}{2}x = 1.$$

$$56. \quad x - \log_3 \sqrt{31 - 9^x} = 1 - \log_3 \sqrt{1 + 3^{2(1-x)}}.$$

57. Найти все действительные значения параметра a , для которых при всех положительных b существует в интервале $0 < x < 1/2$ решение уравнения

$$\log_2(1 - x - x^2) = a \log_{(1-x-x^2)} 2 + b.$$

58. Найти все действительные значения параметра a , для которых при всех отрицательных b существует в интервале $4 < x < +\infty$ решение уравнения

$$a \log_{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} 4 = \log_4 \left(1 - \frac{2}{x}\right) + b.$$

Решить системы уравнений:

$$59. \begin{cases} 3^x \cdot 10^y = 30, \\ xy = 1. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} \log_7 x + y = 5, \\ x^y = 7^6. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} \log_5 x - y = 4, \\ x^y = \frac{1}{125}. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} \frac{2}{\log_2 x} - \log_x(x - y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} 2^x + y = 7, \\ \log_2\left(\frac{y}{3}\right) = 2 - x. \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} y - \log_2 x = 2, \\ x^y = 8. \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} 2y(5 + \log_x(2y)) = x + 40, \\ (x + 2)^{y-4} = 1. \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} \log_x\left(\frac{y}{12}\right) + \frac{3x}{4y} = 0, \\ (y - 2)^{x+1} = 1. \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} (4y^2 - y + 6)2^x = 20y, \\ x + \log_2 y = 2. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} \frac{4+x}{1+x} = 7 \cdot 2^y, \\ \log_2\left(\frac{x}{3}\right) = y + 2. \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} x + y = 2y \log_x y, \\ x^{\lg y} = 1. \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} xy + \log_x y = 0, \\ y^{\sin x} = 1. \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} 2y(3 + 10 \log_x 2) = x^2 + x + 3y^2, \\ (x + 3)^{\log_5(3-y)} = 1. \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} \log_x\left(\frac{y}{9}\right) + \frac{3x}{y(x+9)} = 0, \\ (y - 2)^{-1} = (y - 2)^{-\log_9(x+8)}. \end{cases}$$

Решить неравенства:

$$75. 3x + \sqrt{5x - 1} < 1.$$

$$76. x + \sqrt{6 + x - x^2} < 1.$$

$$77. \sqrt{2 + x - x^2} > 1 - 2x.$$

$$78. \sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x - 1.$$

$$79. 4x + \sqrt{(6-x)(7-3x)} > 0.$$

$$80. 2(2-x) - \sqrt{24+2x-x^2} > 0.$$

$$81. \sqrt{x^2 + x} > 1 - 2x.$$

$$82. \sqrt{5x - x^2 - 4} > 2x - 5.$$

$$83. \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}.$$

$$84. \sqrt{9+4x} - \sqrt{x-3} > \sqrt{4+3x}.$$

$$85. 5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} \leq 2x + \frac{1}{2x} + 4.$$

$$86. 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \leq 2\sqrt{x} + 6.$$

$$87. \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > \frac{x}{2}.$$

$$88. \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} < x.$$

$$89. \frac{(1-x)\sqrt{1-x} + (1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-4x^2+2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}} \geq 1.$$

$$90. \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 - 2(x^2-x)\sqrt{x-x^2}}} > 1.$$

$$91. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1} \geq 0.$$

$$92. \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{1-\sqrt{1+x}} \leq 0.$$

93. Решить неравенство

$$a^{\sqrt{x^2+4x-12}} < a^{2(x-2)} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

94. Решить неравенство $2|x - a| < 2ax - x^2 - 2$ при всех значениях параметра a .

95. Решить неравенство

$$(x^2 - 1)^3 + (x - 1)\sqrt{(x - 1)(x + 1)^3} > 2.$$

96. Для каких x наибольшая из величин $x^2 - x$, $3x + 5$ и $1 - x$ равна сумме двух других?

97. Решить неравенство $\sqrt{a^2 - \sqrt{x^2 - 2ax}} \geq a - x$ при всех отрицательных значениях параметра a .

98. Решить неравенство $\sqrt{a^2 - \sqrt{x^2 - a^2}} \geq x$ при всех значениях параметра a .

99. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $a + \sqrt{x^2 + ax} \geq x$ не пересекается с промежутком $[-1, 0]$?

100. При каких значениях параметра a в множестве решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ содержится промежуток $[1/4, 1]$?

101. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + ax + 1} \geq \sqrt{x}$ при всех значениях параметра a .

102. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - ax + 1} \geq \sqrt{1 - x}$ при всех значениях параметра a .

103. Решить неравенство $\sqrt{2(x - \sqrt{x^2 - a^2})} > \frac{x + a}{5\sqrt{x - a}}$ при всех значениях параметра a .

104. Решить неравенство $|x + a - \sqrt{x^2 - a^2}| < 3(x - a)$ при всех значениях параметра a .

Решить неравенства:

$$105. \frac{1}{a^x - 1} > \frac{1}{1 - a^{x-1}}.$$

$$106. \frac{1}{1 - a^x} > \frac{a}{a^{x+1} - 1}.$$

$$107. 2\log_a(x - 1) - \log_a x < 1.$$

$$108. \log_a(x - 1) + \log_a x > 2.$$

$$109. \sqrt{\log_x a^3 + 3} \cdot \log_a x < -\sqrt{6}.$$

$$110. \sqrt{2 - \log_x a^2} \cdot \log_a x > -\sqrt{12}.$$

$$111. \sqrt{\log_x 4 + 2} \cdot \log_2 x < -2\sqrt{3}.$$

$$112. \sqrt{2 + \log_x 9} \cdot \log_{1/3} x < 2.$$

$$113. \log_a x < \sqrt{\frac{5\log_a x + 2}{3}}.$$

$$114. \log_a x > \sqrt{\frac{6}{(\log_a x - 1)\log_x a}}.$$

$$115. \frac{1}{1 + \log_2 x} + \log_x 8 \geq \frac{5}{4}.$$

$$116. \frac{5}{2}\log_x 2 \geq \frac{1}{\log_2 x - 1} + 7.$$

$$117. (0, 4)^{\log_a^2 x + 1} > (6, 25)^{2 - \log_a x^3}.$$

$$118. (0, 8)^{(\log_a x)^2 - 2\log_a x} < (1, 25)^{-6 + \log_a x}.$$

$$119. \sqrt{3^{1-x} - \frac{24}{1-3^x}} < \sqrt{9 - \frac{8}{1-3^x}}.$$

$$120. \sqrt{2^{2-x} - \frac{12}{1-2^x}} < \sqrt{8 + \frac{9}{1-2^x}}.$$

121. Найти в интервале $(0, 1)$ подмножество тех x , для которых справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x}$$

122. Найти в интервале $(1, +\infty)$ подмножество тех x , для которых справедливо неравенство

$$\lg(3 \log_a x - \log_a^2 x + 4) > \lg(8 - 2 \log_a x).$$

123. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $(0, 4)^{x^2+1} \geq (6, 25)^{a-3x}$ является решением неравенства $x^2 - 6x + 4 < a^2$?

124. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $x^2 \geq x + a^2$ является решением неравенства $(0, 8)^{x^2-2x} \leq (1, 25)^{a+x}$?

125. Найти все такие a , что для любого $x < 0$ выполняется неравенство $\log_2(x^2 + ax + 1) > -1$.

126. Найти все такие a , что для любого $x > 0$ выполняется неравенство $\log_{1/2}(x^2 + 2x + a) < -1$.

127. Найти все такие a , что для любого $x > 0$ выполняется неравенство $\log_a(x^2 + x + 1) > -1$.

128. Найти все такие a , что для любого $x < 0$ выполняется неравенство $\log_a(x^2 - x + 1) < 2$.

129. При каких значениях положительного параметра a строго между корнями уравнения $x^2 + 3a^2x + 2a^4 = 0$ лежит один и только один корень уравнения $x^3 + ax^2 - 4a^3x - 4a^4 = 0$?

130. При всех значениях параметра a найти пары (x, y) целых чисел, которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 2x - |ay^2 - 8ay + 16a - 3| + 4 &> 0, \\ x + |y - 4| &< 1. \end{aligned}$$

131. Для каких действительных значений параметра a уравнение $x = a + \sqrt{x^2 + 2(a+1)x + 4a}$ имеет положительное решение?

132. Для каких действительных значений параметра a уравнение $2a = x + \sqrt{x^2 - 2(x+a) - a^2}$ имеет отрицательное решение?

133. При каком условии на коэффициенты a, b, c линейная замена

$$\begin{aligned} x &= aX + bY + cZ, \\ y &= aY + bZ + cX, \\ z &= aZ + bX + cY \end{aligned}$$

оставляет неизменной квадратичную форму

$$P(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)?$$

134. При каком условии на коэффициенты a, b линейная замена

$$\begin{aligned} x &= aY + bZ, \\ y &= aZ + bX, \\ z &= aX + bY \end{aligned}$$

оставляет неизменной кубическую форму

$$Q(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz?$$

135. В зависимости от параметра p указать те значения a , для которых уравнение $x^3 + 2px^2 + p = a$ имеет три разных корня.

136. В зависимости от параметра a указать те значения q , для которых уравнение $ax^3 + 2x + 1 = q$ имеет три разных корня.

Задача предполагает необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели.

Решение задачи означает нахождение этого средства.

Д.Поля. Математическое открытие. М., 1976. С. 143.

ГЛАВА 3. НАЧАЛА АНАЛИЗА. ЗАДАЧИ НА НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

1. Четыре завода расположены в вершинах ромба, через центр которого проводится прямолинейная линия электропередач. Как должна проходить эта линия, чтобы провод на подключение к ней заводов имел наименьшую длину?

2. Завод расположен на 20 км восточнее города и в 60 км (по кратчайшему расстоянию) от железной дороги, проходящей через город с запада на восток. Как следует построить подъездной путь к заводу, чтобы транспортировка грузов в город была наиболее экономичной, если стоимость перевозки тонны груза на 1 км по подъездному пути в 3 раза дороже, чем по железной дороге?

3. На шероховатой горизонтальной поверхности с коэффициентом трения k находится тело весом P . К телу под углом прикладывается усилие F . Найти наименьшее значение силы F , при котором тело может быть сдвинуто с места. Определить также угол наклона, под которым направлена эта сила.

4. Внутри прямоугольника $ABCD$ размещены два круга, касающиеся друг друга. Один из кругов касается AB и AD , а другой — BC и CD . Найти наименьшее значение суммы площадей этих кругов, если стороны прямоугольника равны a и b ($a \leq b \leq 2a$).

5. Затраты на перевозку грузов судном из одного порта в другой за сутки складываются из постоянной части a и пе-

ременной, пропорциональной квадрату скорости (k – коэффициент пропорциональности). При какой скорости v движение судна наиболее экономично?

6. Отрезок $AB = a$ расположен на горизонтальной прямой. Из точки P , лежащей на этой прямой вне отрезка AB (по ту же сторону от A , что и точка B), восставлен перпендикуляр. На каком расстоянии от горизонтальной прямой находится точка, лежащая на перпендикуляре, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом, если $BP = b$?

7. При столкновении двух частиц в результате слипания и последующего расщепления рождаются три частицы одного сорта. Новые частицы разлетаются с одинаковой скоростью в направлениях, образующих между собой угол α . Определить наибольшую из возможных скоростей новых частиц, если известно, что одна из сталкивающихся частиц имела кинетическую энергию E , а вторая до момента столкновения находилась в состоянии покоя и обладала массой m .

8. При столкновении двух частиц, движущихся навстречу друг другу, в результате слипания и последующего расщепления рождается серия новых частиц с общей массой m . Известно, что новые частицы разлетаются в разных направлениях, составляющих угол α с направлением движения одной из начальных частиц, но с одинаковой скоростью, равной скорости второй из них, причем вторая частица до столкновения имела импульс p . Определить наименьшую из возможных скоростей сближения сталкивающихся частиц.

9. Производственное объединение должно поставить на ферму для выполнения сельскохозяйственных работ некоторое число тракторов, причем известно, что 10 тракторов выполняют эту работу за 12 рабочих дней. Кроме того, известно, что в течение всего периода работ ремонтной бригаде выплачивают 30 руб. в день и каждому трактористу 4 руб. 80 коп. в день за работу и 4 руб. за перегон трактора на ферму и обратно (в течение периода работ тракторы находятся на ферме). При каком числе тракторов суммарная выплата рабочим за выпол-

нение всех работ будет наименьшей? Чему равна минимальная оплата рабочим?

10. Требуется переправить через реку 150 м^3 гравия. Гравий грузится в открытый ящик длиной $1,5 \text{ м}$, шириной 1 м и высотой h . Боковые стороны (длиной $1,5 \text{ м}$) и дно ящика изготовлены из материала, квадратный метр которого стоит 20 руб. , а передняя и задняя стенки (длиной 1 м) — из материала, квадратный метр которого стоит 15 руб. После использования ящик не будет иметь остаточной стоимости, а каждая перевозка ящика с одного берега и обратно стоит 10 коп. При каком значении h транспортировка гравия будет наиболее экономичной? Чему равна минимальная стоимость транспортировки гравия?

11. Годовая выработка P некоторого продукта на одного рабочего, занятого его производством, и численность рабочих x связаны функциональной зависимостью

$$P = \frac{x(M - x) - b}{x},$$

где M , b — постоянные, характеризующие производственные возможности хозяйства. Определить число рабочих, соответствующее наибольшему значению P , в хозяйствах с 80, 90, 120 и 150 рабочими местами, если $M = 250$, $b = 8464$.

12. На производственном участке заработная плата каждого рабочего Q (в рублях) и число занятых в производстве рабочих x связаны соотношением

$$Q = \frac{Lx - x^3 - a}{x},$$

где L , a — постоянные, характеризующие производственные возможности коллектива. Согласно "золотому правилу роста" x следует определять так, чтобы Q принимало наибольшее из возможных значений. Найти по указанному правилу число рабочих при $L = 1500$, $a = 16000$, если известно, что трудовой коллектив располагает N рабочими местами ($N = 15, 18, 25$).

13. По окончании первого цикла работ имеется a литров воды, содержащей $p\%$ вредных веществ. Через каждый час работ на втором цикле воды становится меньше на b литров, а доля вредных веществ в ней увеличивается на $q\%$. Когда следует закончить второй цикл работы, чтобы при сливе оставшейся воды можно было уничтожить наибольшее количество вредных веществ?

14. По окончании первого этапа обработки имеется A тонн продукта, содержащего $a\%$ изготавливаемого вещества. Каждые сутки на втором этапе обработки увеличивают массу продукта на B тонн и уменьшают долю изготавливаемого вещества на $b\%$. Когда нужно прекратить второй этап обработки, чтобы выход изготавливаемого вещества был максимален?

15. В ЭВМ вводится информация объемом P бит (бит – единица объема информации), которая обрабатывается по заданной программе, после чего результат выводится на печатающее устройство. Определить наименьшую продолжительность работы ЭВМ на всех трех этапах – прием, переработка и выдача информации, – если известно, что скорость обработки информации равна C бит в секунду и в 3 раза меньше суммарной скорости ввода и выдачи информации, при этом объем информации на входе и выходе одинаков.

16. В ЭВМ вводится некоторая информация, результаты обработки которой совместно с информацией, содержащейся в блоке памяти объемом C бит (бит – единица объема информации), поступают в вычислительную машину с постоянной скоростью, квадрат которой пропорционален объему введенной информации (k – коэффициент пропорциональности). Определить наименьшую продолжительность работы вычислительной машины по переработке информации.

17. Каков должен быть радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности S , чтобы объем конуса был наибольшим?

18. Каков должен быть радиус основания цилиндра с заданным объемом V , чтобы площадь полной поверхности была наименьшей?

19. Определить высоту конуса с наибольшей площадью боковой поверхности, вписанного в шар радиусом R . Чему равна наибольшая площадь боковой поверхности?

20. Определить радиус цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности, вписанного в шар радиусом R . Чему равна наибольшая площадь боковой поверхности?

21. Определить высоту конуса с наибольшей площадью полной поверхности, вписанного в шар радиусом R .

22. Определить радиус цилиндра с наибольшей площадью полной поверхности, вписанного в шар радиусом R .

23. Через данную точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от него треугольник наименьшей площади. Вычислить наименьшее значение площади.

24. Через данную точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы суммарная длина отрезков, отсекаемых от сторон угла этой прямой, была наименьшей. Вычислить наименьшее значение указанной суммы.

25. Две секущие плоскости расположены симметрично относительно центра шара радиусом R . Найти множество возможных значений отношения площади полной поверхности части шара, заключенной между обеими плоскостями, к площади поверхности шара. Считая, что это отношение равно $7/8$, определить расстояние от центра шара до секущей плоскости.

26. Найти множество возможных значений отношения объема конуса, вписанного в шар радиусом R , к объему шара. Считая, что это отношение равно наибольшему из возможных значений, определить расстояние от центра шара до основания конуса.

27. Для каких значений параметра a наибольшее на промежутке $[1, 2]$ значение функции $y = ax + \frac{2}{x}$ достигается на правом конце промежутка?

28. Для каких значений параметра b наименьшее на промежутке $[2, 3]$ значение функции $y = 2x - \frac{b}{x}$ достигается на левом конце промежутка?

29. При каких значениях параметра p наименьшее на промежутке $[0, 1]$ значение кубического трехчлена $x^3 - 2px^2 + 1$ достигается на правом конце промежутка?

30. При каких значениях параметра a наибольшее на промежутке $[1, 2]$ значение кубического трехчлена $ax^3 + 4x + 1$ достигается на левом конце промежутка?

31. Выбрать число t так, чтобы наименьшее значение функции

$$f(x) = 8t \cos x - \cos 2x + 4t - 8t^2$$

на промежутке $[0, \pi/2]$ было наибольшим.

32. Выбрать число t так, чтобы наибольшее значение функции

$$f(x) = 4t \sin x - \cos 2x + 2t^2 - 2t$$

на промежутке $[0, \pi]$ было наименьшим.

33. Расположить в порядке убывания числа

$$\begin{aligned} a_1 &= \log_{1/2} \sin 2x, \\ a_2 &= -1 - \log_2 \sin x, \\ a_3 &= \log_{1/2}(1 - \cos 2x), \end{aligned}$$

если известно, что $0 < x < \pi/4$.

34. Расположить в порядке возрастания числа

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \log_2 \cos x, \\ a_2 &= \log_2(1 + \cos 2x), \\ a_3 &= 1 - 2 \log_{1/2} \sin 2x, \end{aligned}$$

если известно, что $0 < x < \pi/6$.

35. Выбрать число b так, чтобы наибольшее значение функции $y = |-2x^2 + x + b|$ на промежутке $[0, 1]$ было наименьшим.

36. Выбрать число a так, чтобы наибольшее значение функции $y = |x^2 + ax - 2|$ на промежутке $[-1, 1]$ было наименьшим.

37. При каком значении a максимальная абсолютная погрешность на промежутке $[1, 8]$, возникающая при замене $y = \sqrt[3]{x}$ на квадратный трехчлен $y = a + \frac{5}{9}x - \frac{x^2}{9}$, будет наименьшей?

38. При каком значении $b \in [0, 1]$ максимальная абсолютная погрешность приближенной формулы

$$\sqrt{x} \simeq b \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} \right) + (1 - b) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8}x - \frac{x^2}{64} \right)$$

на промежутке $[1, 4]$ будет наименьшей?

39. Определить на промежутке $(1, 10]$ наибольшее значение абсолютной погрешности приближенного вычисления $y = x^3$ по следующему правилу: если $k < x \leq k + 1$ ($k = 1, 2, \dots, 9$), то $y = x^3$ приближенно равно значению в точке x квадратного трехчлена, совпадающего в точках $0, k, 10$ с $0, k^3, 1000$ соответственно.

40. Определить на промежутке $[1/4, 10]$ наибольшее значение абсолютной погрешности приближенного вычисления $y = \sqrt{x}$ по следующему правилу: если $(k - 1)^2 \leq x < k^2$ ($k = 1, 2, \dots$), то

$$\sqrt{x} \simeq \frac{3}{8}k + \frac{3}{4k}x - \frac{x^2}{8k^3}.$$

Решение задач является наиболее характерной и специфической разновидностью свободного мышления.

Джеймс У. Психология. СПб., 1896. 408 с.

ГЛАВА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решить уравнения:

1. $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1.$

2. $\sin 2x = 2 \cos x \sin \frac{x}{2}.$

3. $3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x = 2(1 + \sin 2x).$

4. $2 \sin^2 x = 3 + 2(\cos 2x + \sin 2x).$

5. $\cos^2 2x + 4 \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2 \cos 2x.$

6. $2 \sin 6x = \sin^2 6x + 4 \cos^4 3x.$

7. $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x.$

8. $\sin 3x = \cos x - \sin x.$

9. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x.$

10. $1 - 2 \sin^2 x = \cos 6x.$

11. $\sin 2x = \sin x \sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right).$

12. $\cos 2x = \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin^2 x.$

13. $\sin^2 \left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{5}{4}.$

14. $\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{3}{2}.$

15. $\frac{\sin^3 x + \sin 3x}{3 \cos x} = -3 + 5 \cos^2 x.$

16. $\frac{2(\cos^3 x - \cos 3x)}{3 \sin x} = 1 + 5 \cos 2x.$

17. $\cos 3x \cos^3 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \sin 3x \sin^3 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{3}{4}.$
18. $\cos 3x \sin^3 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \sin 3x \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{8}.$
19. $(\cos 2x + \cos x + 1)^2 = 2(2 \cos x + 1)(\cos 2x - \cos x)$
20. $2(\sin x + \cos 2x)^2 = (2 \sin x + 1)(2 \cos 2x - 1).$
21. $5 \sin 2x + \cos 3x + 5 \cos x = 0.$
22. $7 \sin 2x + \sin 3x - 7 \sin x = 0.$
23. $\sin x(\sin x + 3) = 2(\cos x - 1).$
24. $\cos x(2 \cos x - 5) = 3(\sin x - 1).$
25. $\cos^6 x + \sin^6 x = 4 \sin^2 2x.$
26. $\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) = \sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x.$
27. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$
28. $\sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{13x}{2} \right) = \cos 7x \cos 6x.$
29. $\operatorname{tg}^2 x + \frac{\cos x - 3 \sin x}{\sin x - 3 \cos x} = 0.$
30. $\frac{\sin 2x}{2} = \frac{\sin^3 x + 3 \cos^3 x}{\sin x + 3 \cos x}.$
31. $\sin^3 \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}.$
32. $\sin 2x = 1 + 5 \cos 2x.$
33. $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \cos 2x.$
34. $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{3} \cos 2x.$
35. $\cos x - 3 \cos 2x = 3 + \cos 3x.$
36. $3 \cos 2x - \sin x = 3 + \sin 3x.$
37. $7 - 3 \operatorname{tg}^2 x - 6 \cos 2x = 4 \cos^2 x.$
38. $3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \cos 2x - 1 = 4 \sin^2 x.$
39. $\operatorname{tg}^2 x - 20 \cos^2 x + 2 = 0.$

$$40. 3\operatorname{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 2 = 0.$$

$$41. \cos^2 5x + \cos^2 x + \cos 6x = 1.$$

$$42. \sin^2 5x = \sin 4x + \sin^2 x.$$

$$43. \sin 2x + \sin 4x = \sin x + 2\cos x \sin 4x.$$

$$44. \cos 5x - \sin 2x = \cos x - 2\sin x \cos 5x.$$

$$45. \sin^2 2x - 2\cos 2x = 1 + 4\sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$46. \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 2x + \sin^2 2x = 1 + 4\cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$47. \sin 17x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x = 0.$$

$$48. \sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x + \frac{1}{2} \cos 7x = 0.$$

$$49. \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{32}{5}.$$

$$50. 16\cos^4 x = 5(\cos^3 2x + 1).$$

51. Решить уравнение $\sin 5x - \cos 6x + \sin x + 2\cos 2x = 0$ на промежутке $[\pi, 2\pi]$.

52. Решить уравнение $\cos 3x - \sin 6x - \cos 7x - 2\sin 2x = 0$ на промежутке $[0, \pi]$.

53. Решить неравенство $\sin 4x + \sin 3x \leq \sin 2x - 2\sin x$ на промежутке $[\pi/2, 3\pi/2]$.

54. Решить неравенство $\sin 5x + 3\cos 2x \geq \sin 4x - \sin x$ на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Решить уравнения:

$$55. 4\sin^3 x + 10\sin^2 x + 3\sin x = 6\cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

$$56. \cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$57. \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right)}{\sqrt{\cos^4\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 2}} = 1.$$

$$58. \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + \frac{9 \sin^4 2x + \cos^4 2x}{\sqrt{3} \sin^2 4x} = \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right).$$

Решить системы уравнений:

$$59. \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}, \\ \cos 2(x + y) + \cos 2(x - y) = -1. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{3}{4}, \\ \cos 2(x + y) - \cos 2(x - y) = 1. \end{cases}$$

Решить уравнения:

$$61. \frac{\sqrt{\sin 3x + \sin x}}{1 - \sin x} = \sqrt{6}.$$

$$62. \frac{\sqrt{\cos 3x - 3 \cos x - 2}}{1 + \cos x} = \sqrt{2}.$$

$$63. 2 \sin x = \sqrt{4 + \cos 3x}.$$

$$64. \sqrt{3 \sin x(1 - \sin x)} = \sin 2x.$$

$$65. \sin x + \sqrt{\sin x + \sin 2x - \cos x} = \cos x.$$

$$66. 2 \sin x + \sqrt{4 + 2 \cos x - \sin 2x - 2 \sin x} = 1 + 2 \cos x.$$

$$67. \log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4 \cos^2 x) = 2.$$

$$68. \log_{2 \cos x}(5 - 3 \operatorname{tg}^2 x) = 2.$$

$$69. 39 \cdot 5^{1-2 \sin^2 x} - 5^{2 \cos 2x+1} = 34.$$

$$70. 7^{2-\sin^2 x} - 7^{\cos 2x} = \frac{48}{7}.$$

$$71. 2 \log_{\sin x}(\operatorname{tg} x) + \log_{\operatorname{tg} x}(\sin x) = 3.$$

$$72. \log_{\sin x}(\cos 2x) = 1 + 2\log_{\cos 2x}(\sin x).$$

$$73. 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin^2 x} + 2^{\cos 2x} = 2^{\sin 2x + 1}.$$

$$74. 9^{\cos^2 x} + 3^{\cos 2x} = 4 \cdot 3^{-\sin 2x}.$$

$$75. 4^{\sin x} + 16^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \frac{17}{2}.$$

$$76. 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} + \frac{8}{4^{\sin^2 x}} = 9.$$

$$77. 16^{\cos 2x} = 6 \cdot 4^{-2\sin^2 x} + 1.$$

$$78. 18 \cdot 3^{2\cos 2x} + 9^{\cos^2 x} = 3.$$

$$79. \log_3(\cos 2x) - 2\log_3(\operatorname{tg} x) = 1 + \log_3(\sin x + \cos x) + \log_3(\cos x - \sin x).$$

$$80. 2(1 + \log_2(\cos x)) = 4\log_2(\sin x) - \log_2(\sin 2x).$$

$$81. \log_2(9 + 8\sin^2 x - 3\sin 2x) = 3 - \log_{1/2}(\sin^4 x + 1).$$

$$82. \log_2(9 + \cos 2x) + \log_{1/2}(\sin^2 x \cos^2 x + 1) = 3.$$

$$83. 2\log_{\cos x} \left| \cos\left(\frac{3}{4}x\right) \right| = 1.$$

$$84. 2\log_{(-\cos x)} \left| \frac{\sin\left(\frac{3x}{4}\right) + \cos\left(\frac{3x}{4}\right)}{\sqrt{2}} \right| = 1.$$

85. Решить уравнение $\cos^2 x = a \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ при всех значениях параметра a .

86. Решить уравнение $a(\sin x + \cos x)^2 = \sin 2x$ при всех значениях параметра a .

87. Найти на плоскости все точки, координаты которых (a, b) обладают тем свойством, что уравнение

$$|y| = -\cos^2 x + a \cos x - b$$

имеет хотя бы одно решение.

88. Найти на плоскости все точки, координаты которых (a, b) обладают тем свойством, что уравнение

$$|y| = a \sin^2 x + 2 \sin x - b$$

имеет хотя бы одно решение.

Решить системы уравнений:

$$89. \begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{10}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{10}. \end{cases} \quad 90. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 10. \end{cases}$$

91. Решить уравнение

$$(2 + a) \cos^2 x + \sin x \cos x = (1 - a) \sin^2 x$$

при всех значениях параметра a .

92. Решить уравнение $a \sin^2 x + (a - 1) \cos^2 x = \sin 2x$ при всех значениях параметра a .

93. Решить уравнение $4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = (3a - \sin 2x)^2$ при всех значениях параметра a .

94. Решить уравнение $2(\sin^2 2x - a \sin^2 x) = a^2$ при всех значениях параметра a .

95. Решить уравнение $(\sin x - 1) \cos^2 x + a \sin x = -1$ при всех значениях параметра a .

96. Решить уравнение $\left(\cos \frac{x}{2} \cdot \sin x \right)^2 = \frac{1}{2} + a \cos x$ при всех значениях параметра a .

Подобные представления об этих вещах весьма полезны, поскольку ничто не является для нас более наглядным, чем фигура, ибо ее можно осязать и видеть.

Р. Декарт. Правила для руководства ума. Соч. в 2 т. М., 1989. Т.1. 114 с.

ГЛАВА 5. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

1. Определить острые углы прямоугольного треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию.

2. Определить острые углы прямоугольного треугольника, стороны которого составляют геометрическую прогрессию.

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c и в три раза больше высоты, проведенной из вершины прямого угла. Найти катеты.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c и больше одного из катетов на третью часть другого. Найти площадь треугольника.

5. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a , а биссектриса одного из острых углов $a/\sqrt{3}$. Найти катеты.

6. В прямоугольном треугольнике катеты равны $3a$ и $4a$. Найти биссектрисы острых углов.

7. На гипотенузе прямоугольного треугольника, вне его, построен квадрат. Определить расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата, зная, что сумма катетов равна l .

8. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b найти биссектрису прямого угла.

9. Радиус круга, описанного вокруг прямоугольного треугольника, равен R , а один из острых углов α . Найти радиус вписанного круга.

10. В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно k , а радиус вписанного круга r . Найти радиус описанного круга.
11. Доказать, что треугольник со сторонами $65/9$, 7 и $16/9$ прямоугольный, причем его площадь, увеличенная на один из катетов, есть куб, а периметр есть квадрат целого числа.
12. Доказать, что $629/50$, $621/50$ и 2 являются сторонами прямоугольного треугольника, причем его площадь, увеличенная на гипотенузу, есть квадрат, а периметр есть куб целого числа.
13. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если его острый угол равен 2α , а радиус вписанного круга r .
14. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его острый угол равен α , а радиус описанного круга R .
15. В прямоугольном треугольнике один острый угол вдвое больше другого острого угла, а сумма катетов равна l . Найти площадь треугольника.
16. В угол вписаны два круга, касающиеся друг друга. Известно, что один из кругов имеет площадь, в два раза большую, чем другой. Найти величину угла.
17. В прямоугольный треугольник, у которого острый угол равен α , а площадь равна S , вписан квадрат так, что две из его сторон лежат на катетах, а одна из вершин находится на гипотенузе. Найти периметр квадрата.
18. В равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = AC$, угол при вершине A равен α , а площадь равна S , вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти наименьшее из расстояний от вершины A до вершин квадрата.
19. В прямоугольнике $ABCD$ даны $AB = a$; $AD = b$. Точка E лежит на стороне AB и $\angle CED = \angle AED$. Найти AE .

20. В треугольнике ABC угол при вершине C равен $\pi/3$, $BC = a$, а отношение медианы, исходящей из вершины C , к AC равно k . Найти AC .

21. Даны равносторонний треугольник со стороной a и окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и делящая вторую сторону на две равные части. Кроме того, известно, что центр окружности лежит на третьей стороне треугольника. Найти расстояние от центра окружности до ближайшей вершины треугольника.

22. Даны равнобедренный треугольник с основанием a и окружность с центром в одной из вершин треугольника. Известно, что одна из боковых сторон треугольника делится окружностью на три равные части. Найти радиус окружности.

23. В треугольнике ABC точки D и E лежат на сторонах AB и BC соответственно. Точкой D сторона AB делится в отношении $1 : 3$, а точкой E сторона BC делится в отношении $2 : 5$. Какую часть составляет площадь треугольника DBE от площади треугольника ABC ?

24. В треугольнике ABC точки P и M лежат на сторонах AB и AC соответственно. Точкой P сторона AB делится в отношении $4 : 7$, а площадь треугольника APM составляет пятую часть от площади треугольника ABC . В каком отношении точка M делит сторону AC ?

25. По основанию a и боковым сторонам b и c треугольника определить отрезки, на которые биссектриса внутреннего угла при вершине делит основание.

26. По основанию a и боковым сторонам b и c треугольника определить расстояния от концов основания до точки пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине с продолжением основания.

27. В равнобедренный треугольник с углом при вершине α и радиусом описанного круга R вписан прямоугольник так, что меньшая его сторона лежит на основании треугольника. Найти площадь этого прямоугольника, если одна из его сторон в два раза больше другой.

28. В равнобедренный треугольник с углом при основании α и радиусом вписанного круга r вписан прямоугольник так, что его большая сторона лежит на основании треугольника, а две противоположные вершины -- на боковых сторонах треугольника. Найти площадь этого прямоугольника, если одна из его сторон в 4 раза больше другой.

29. В квадрате $ABCD$ со стороной a точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на стороне CF , точка N лежит на стороне AD , а отрезки KN и EF пересекаются в точке M . Найти длину отрезка KM , если известно, что $\frac{CK}{KF} = \frac{1}{4}$, а площадь четырехугольника $EMNA$ составляет $\frac{7}{40}$ площади квадрата.

30. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки E и D являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка P лежит на отрезке BD , точка K лежит на стороне AC , а отрезки ED и PK пересекаются в точке M . Найти длину отрезка MP , если известно, что $\frac{PD}{PB} = \frac{1}{3}$, а площадь четырехугольника $AEMK$ составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника ABC .

31. Дан треугольник ABC со сторонами a , b и c . Через точку D , лежащую на стороне AB , проведена прямая, параллельная стороне BC , и E -- точка пересечения этой прямой со стороной AC . Известно, что $DE = BD + EC$. Найти AD .

32. Дан треугольник ABC со сторонами a , b и c . Через точку D , лежащую на стороне AB , проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC , и E , F -- точки пересечения этих прямых со сторонами AC и BC . Известно, что $DE = DF$. Найти AD .

33. По сторонам треугольника a и b и медиане m_c определить остальные медианы.

34. По двум сторонам треугольника b и c и биссектрисе l_a определить третью сторону.

35. По одну и ту же сторону от прямой AB построены три полуокружности с диаметрами $AB = a + b$, $AC = a$,

$CB = b$. Вычислить радиус окружности, вписанной в фигуру, образованную заданными полуокружностями.

36. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найти площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

37. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18 см, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2 см. Найти основание треугольника.

38. В равнобедренный треугольник с периметром 6 см вписана окружность. Расстояние между точками касания, лежащими на боковых сторонах, равно 1 см. Найти основание треугольника.

39. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a . На сторонах AB , BC и CA отложены равной длины отрезки AA' , BB' и CC' по направлениям AB , BC и CA так, что площадь треугольника $A'B'C'$ в k раз меньше площади треугольника ABC . Найти длину указанных отрезков.

40. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a . Через точку D , взятую на стороне BC на расстоянии d от вершины A , проводятся прямые DP и DQ , параллельные сторонам AC и AB , причем точки P и Q находятся на сторонах AB и AC соответственно. Найти длину отрезка PQ .

41. Найти длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых его сторонах.

42. Найти длину стороны квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах.

43. В прямоугольнике с периметром $2p$ радиус окружности, касательной к одной стороне прямоугольника и проходящей через две его вершины, равен $p/2$. Найти площадь прямоугольника.

44. В прямоугольнике сумма диагонали и одной стороны равна l , а сумма диагонали и другой стороны равна p ($p < l$). Найти площадь прямоугольника.

45. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна c , а диагональ, равная l , делит площадь ее в отношении $3 : 5$. Найти основания трапеции.

46. Средняя линия трапеции, равная l , делит площадь ее в отношении $3 : 5$. Найти основания трапеции.

47. Средняя линия трапеции делится одной из диагоналей в отношении k и делит трапецию на две части, меньшая из которых имеет площадь S . Найти площадь трапеции.

48. В равнобедренной трапеции точка пересечения диагоналей делит их в отношении k , а площадь треугольника, образованного диагональю, боковой стороной и большим основанием, равна S . Найти площадь трапеции.

49. В равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом R , отношение длин боковой стороны и большего основания есть заданное число k . Найти длину меньшего основания.

50. Найти расстояние от вершин равнобедренной трапеции до точки пересечения прямых, продолжающих ее боковые стороны, если известно, что в нее можно вписать окружность, отношение длин оснований есть заданное число k , а длина средней линии равна l .

51. По основаниям a и b трапеции найти длину заключенного между боковыми сторонами отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей.

52. По основаниям a и b трапеции найти длину заключенного между продолжением диагоналей отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения продолжения боковых сторон.

53. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD . Найти BC , если известно, что $AD = a$, $AB + BC = \frac{10}{9}a$.

54. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD . Найти BC , если известно, что $AD = a$, $AB^2 + BC^2 = \frac{11}{16}a^2$.

55. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a , а меньшее в два раза больше боковой стороны. Найти меньшее основание.

56. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a , а сумма меньшего основания и боковой стороны равна $3a/4$. Найти меньшее основание.

57. В равнобедренной трапеции по боковой стороне a , высоте h и периметру $2p$ найти основания.

58. В равнобедренной трапеции по основаниям a и b и диагонали d найти боковую сторону.

59. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади получившихся трех треугольников равны S_1 , S_2 и S_3 . Найти площадь основного треугольника.

60. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, O – точка пересечения диагоналей. Найти площадь трапеции, если площади треугольников AOD и BOC равны S_1 и S_2 соответственно.

61. Вершины правильного треугольника со стороной a вместе с вершинами его образа при повороте вокруг центра описанной окружности образуют шестиугольник с заданным периметром l . Найти угол поворота.

62. Вершины одного квадрата лежат на границе другого. Найти отношения длин отрезков, на которые эти вершины разбивают стороны второго квадрата, если известно, что отношение площадей квадратов равно p .

63. В окружность с радиусом R вписан равнобедренный прямоугольный треугольник. На дуге, стягиваемой одним из

катетов, найти точку, для которой отношение расстояний до двух ближайших вершин есть заданная величина k .

64. В окружность с радиусом R вписан равносторонний треугольник. Найти на окружности точку, для которой сумма расстояний до двух ближайших вершин есть заданная величина L .

65. В окружность с радиусом R вписан равносторонний треугольник. Определить сумму расстояний от данной точки на окружности до двух ближайших вершин треугольника, если известно, что хорда, соединяющая эту точку с третьей вершиной треугольника, образует угол α с диаметром, проведенным из третьей вершины ($0 \leq \alpha < \pi/6$).

66. В окружность вписан равнобедренный прямоугольный треугольник. Отношение расстояний от данной точки на дуге, стягиваемой одним из катетов, до двух ближайших вершин треугольника равно k . Найти отношения этих расстояний к расстоянию от данной точки до третьей вершины треугольника.

67. Три круга – один с радиусом r и два других с радиусами $3r/2$ – расположены на плоскости так, что каждые два из них касаются друг друга внешним образом (имеют только одну общую точку). Определить радиус круга, в который вписана данная система кругов.

68. Три круга – один с радиусом R и два других с радиусами $4R$ – расположены на плоскости так, что каждые два из них касаются друг друга внешним образом (имеют только одну общую точку). Определить радиус круга, касающегося внешним образом каждого из трех кругов.

69. Прямоугольный сектор с радиусом R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в одном конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в большую из этих частей.

70. На отрезке и двух его половинах как на диаметрах построены полуокружности так, что два меньших полуокружности содержат-

ся в большем. По радиусу R круга, касательного ко всем трем полукругам, определить длину отрезка.

71. Круг с радиусом R касается внешним образом трех равных кругов, каждый из которых касается двух других. Определить радиус этих кругов.

72. В круг с радиусом R вписаны три равных круга, касающихся друг друга. Определить радиус этих кругов.

73. В круге через середину хорды длиной a проведена хорда длиной b . Определить длину отрезков, на которые хорда b делится хордой a .

74. Расстояние точки, лежащей внутри круга с радиусом R , от его центра равно d . Определить длину хорды, проведенной через эту точку, если хорда делится последней в отношении $2 : 3$.

75. Две окружности с радиусами r и R касаются друг друга внешним образом. Определить радиус окружности, которая касается обеих заданных окружностей и отсекает от их внутренней касательной хорду длиной l .

76. Две окружности с радиусами r и R касаются друг друга внешним образом. Найти радиус окружности, которая касается обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

77. В угол α вписаны два касающихся друг друга круга. Найти отношение радиусов этих кругов.

78. В параллелограмме даны острый угол α и расстояния m и p от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Найти площадь параллелограмма.

79. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена медиана AD . Найти угол BAD , если известно, что угол при вершине B равен α .

80. К окружности с радиусом r из точки A , лежащей вне окружности, проведены две секущие ABC и ADE , причем ABC проходит через центр окружности. Найти длину AB ,

если известно, что дуги CE и BD равны α и β соответственно.

81. В круг вписан четырехугольник. Продолжения противоположных сторон четырехугольника образуют углы α и β . Определить углы четырехугольника.

82. Найти площадь параллелограмма по диагоналям p и q ($p > q$) и острому углу α .

83. Через точку A , лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности с радиусом r , проведена прямая на расстоянии $r/2$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B и C . Найти AB и AC .

84. Точка M лежит внутри круга с радиусом r , а хорда AB проходит через точку M , делится этой точкой в отношении $1 : 2$ и образует с диаметром, проходящим через точку M , угол $\pi/6$. Найти AB .

85. Изобразить на плоскости множество точек $M(x, y)$, для которых $|x + y| \geq 2$, $x^2 + y^2 \leq 2(1 + x + y)$, и вычислить его площадь.

86. Изобразить на плоскости множество точек $M(x, y)$, для которых $|x - y| \leq 3$, $x^2 + y^2 \leq 2(2 - x + 2y)$, и вычислить его площадь.

87. Указать на плоскости множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют неравенству $|2x - y| \leq 1$.

88. Указать на плоскости множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют неравенству $|2x + y| \geq 1$.

89. Какое геометрическое место точек плоскости с прямоугольными декартовыми координатами x , y задается уравнением

$$y - x^2 = |y + 2x|?$$

90. Какое геометрическое место точек плоскости с прямоугольными декартовыми координатами x , y задается уравнением

$$y + x^2 = |y - 2x|?$$

91. На плоскости найти геометрическое место точек, координаты которых x и y удовлетворяют уравнению

$$x = |x - y^2| + y.$$

92. Найти на плоскости геометрическое место точек, координаты которых x и y удовлетворяют уравнению

$$y = |y - x^2 - 2x| + x.$$

93. На плоскости найти геометрическое место точек, координаты которых x и y удовлетворяют неравенству

$$|3 - x| \geq y^2 - 1.$$

94. На плоскости найти геометрическое место точек, координаты которых x и y удовлетворяют неравенству

$$|y + 1| \geq x^2 + 2x.$$

Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач.

Р. Декарт. Рассуждение о методе. Избр. произв. М., 1950. С. 274.

ГЛАВА 6. ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

1. Каждый из плоских углов при вершине трехгранного угла равен α . На какое расстояние удалена от вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждой грани?

2. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α . На какое расстояние удалена от вершины трехгранного угла точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого ребра?

3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α , а длина стороны основания равна a . Найти объем той части пирамиды, которая заключена между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через его сторону под углом φ к плоскости основания.

4. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α , а длина стороны основания равна a . Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания под углом φ к его плоскости.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a , а угол при вершине равен α . Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к нему, а боковые ребра наклонены под углом α . Определить радиус шара, описанного около пирамиды.

6. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b , а угол между ни-

ми α . Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к нему, а третья грань наклонена под углом α . Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

7. Определить радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a , а угол при вершине равен α .

8. Определить радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a , а угол при вершине равен α .

9. В правильной треугольной пирамиде боковая грань образует угол α с плоскостью основания. Найти величину двугранного угла между двумя боковыми гранями.

10. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань образует угол α с плоскостью основания. Найти величину двугранного угла между двумя смежными боковыми гранями.

11. Основанием пирамиды является прямоугольник, у которого меньшая сторона равна a , а острый угол между диагоналями α . Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β . Найти объем пирамиды.

12. Основанием пирамиды является ромб с острым углом при вершине α и стороной a . Все боковые грани наклонены к основанию под углом β . Найти объем пирамиды.

13. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 90° , а площадь сечения ее плоскостью, проходящей через одну из вершин основания и середины противоположащих этой вершине боковых ребер, равна 6 см^2 . Найти объем пирамиды.

14. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 90° , а площадь сечения ее плоскостью, проходящей через середины двух боковых ребер и параллельной третьему боковому ребру, равна $9\sqrt{2} \text{ см}^2$. Найти объем пирамиды.

15. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и величине α двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями, определить длину бокового ребра.

16. В правильной четырехугольной пирамиде по стороне основания a и боковому ребру l определить величину двугранного угла, образованного двумя смежными боковыми гранями.

17. В правильной треугольной пирамиде известны радиус r окружности, описанной около основания, и угол α наклона боковой грани к плоскости основания. Найти радиус описанного шара.

18. В правильной четырехугольной пирамиде известны боковое ребро a и плоский угол при вершине α . Найти радиус описанного шара.

19. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b , а угол при основании равен α ($\alpha > \pi/4$). Каждое из боковых ребер пирамиды образует угол β с плоскостью основания. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и вершину угла α .

20. Основанием пирамиды служит равнобокая трапеция, у которой боковые стороны и меньшее основание равны a , а острый угол равен α ($\alpha > \pi/3$). Каждое из боковых ребер пирамиды образует угол β с плоскостью основания. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды перпендикулярно основаниям трапеции.

21. В треугольной пирамиде через середины двух пар скрещивающихся ребер проведена плоскость. В каком отношении находятся объемы полученных в результате сечения частей пирамиды?

22. Точки A' , B' , C' на ребрах AS , BS , CS треугольной пирамиды $ABCS$ таковы, что $SA' = A'A$, $SB' = 2B'B$, $SC' = 3C'C$. В каком отношении плоскость $A'B'C'$ делит объем пирамиды?

23. Две равные правильные четырехугольные пирамиды расположены в пространстве так, что их основания совпадают,

а вершины находятся по разные стороны от общей плоскости основания. Известно, что сторона основания равна a , а плоский угол при вершине равен α . Найти радиус шара, вписанного в восьмигранник, образованный этими пирамидами.

24. Две равные правильные треугольные пирамиды расположены в пространстве так, что их основания совпадают, а вершины находятся по разные стороны от общей плоскости основания. Известно, что сторона основания равна a , а плоский угол при вершине равен α . Найти радиус шара, вписанного в шестигранник, образованный этими пирамидами.

25. В шаре радиусом R из точки на его поверхности проведены четыре равные хорды, образующие четырехгранный угол с равными плоскими углами α . Определить длину хорд.

26. В шаре радиусом R из точки на его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить их длину.

27. В правильной шестиугольной пирамиде угол между смежными боковыми гранями равен β , а сторона основания равна a . Найти площадь диагонального сечения пирамиды, содержащего центр основания. (Диагональным сечением называется сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.)

28. В правильной четырехугольной пирамиде угол между смежными боковыми гранями равен α , а сторона основания равна a . Найти площадь диагонального сечения пирамиды. (Диагональным сечением называется сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.)

29. Все плоские углы при вершине D треугольной пирамиды $ABCD$ равны α ($0 < \alpha < \pi/2$), l – длина ребра DB , S – площадь грани ACD . Найти объем пирамиды.

30. Площадь основания наклонной призмы равна S , $\angle BAD = 2\beta$ (AB, AD – стороны основания), l – длина проекции ребра AC на основание, $\angle CAD = \angle CAB = \alpha$ ($0 < \beta < \alpha < \pi/2$). Найти объем призмы.

31. Основание наклонной призмы – правильный треугольник со стороной a . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под острым углом α , причем одно из этих ребер проектируется на высоту нижнего основания, имеющую с ним общую вершину. Через эту вершину проведена секущая плоскость, параллельная противоположной стороне основания, образующая с плоскостью этого основания угол β и непересекающая верхнее основание. Найти площадь сечения.

32. Основанием призмы является квадрат со стороной a , а боковые ребра наклонены к плоскости основания под острым углом α , причем проекция одного из них содержит диагональ квадрата. Из вершины квадрата, для которой проходящие через нее ребро и диагональ квадрата образуют острый угол, параллельно другой диагонали проведена секущая плоскость под углом β к плоскости основания. Найти площадь сечения в предположении, что сечение не пересекает верхнее основание.

33. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с тупым углом α и сторонами a и b . Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

34. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с острым углом α и сторонами a и b ($a < b$). Большая из диагоналей боковых граней равна меньшей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

35. Грани некоторого параллелепипеда есть ромбы, равные между собой и расположенные так, что вместе встречаются три острых плоских угла. Найти объем этого параллелепипеда, если известно, что сторона ромба равна a , а острый угол α .

36. В основании прямого параллелепипеда с равными ребрами лежит ромб со стороной a , а его большая диагональ наклонена к плоскости основания под углом α . Найти объем этого параллелепипеда.

37. Угол между прямой и плоскостью равен α , а проекция прямой на плоскость образует угол β с другой прямой, лежащей в этой плоскости. Найти угол между прямыми.
38. Угол между двумя прямыми равен α , а проекция первой прямой на плоскость, содержащую вторую прямую, образует со второй прямой угол β . Найти угол между первой прямой и плоскостью.
39. Через вершину прямого кругового конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание по хорде длиной a , стягивающей дугу в основании конуса, которой соответствует центральный угол β . Найти объем конуса.
40. Осевое сечение прямого кругового конуса является треугольником с площадью S , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Найти объем конуса.
41. В прямом круговом конусе даны площадь основания S_1 и площадь боковой поверхности S_2 . Найти радиус вписанного шара.
42. В прямом круговом конусе даны объем V и площадь основания S . Найти радиус описанного шара.
43. Высота конуса равна диаметру основания. Через некоторую точку конуса проведена плоскость, касательная к боковой его поверхности, и в этой плоскости через вершину конуса проходит прямая под углом α к линии касания. Найти угол, который составляет проведенная прямая с плоскостью основания.
44. Высота цилиндра равна диаметру основания. Под углом α к плоскости основания проведена прямая, соединяющая некоторую точку окружности нижнего основания с некоторой точкой окружности верхнего основания. Найти кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра, если радиус основания равен R .
45. Три шара касаются друг друга. Два из них имеют радиус r , радиус третьего шара R ($R > r$). При каком соот-

ношении радиусов угол между плоскостями, каждая из которых касается всех трех шаров, будет прямым?

46. Все вершины куба лежат на концентрических сферах с радиусами r и R ($r < R$). Найти ребро куба.

47. Даны шар с радиусом R и две секущие плоскости, симметричные относительно центра шара и такие, что площадь полной поверхности части шара, заключенной между этими плоскостями, в k раз меньше площади поверхности шара. На каком расстоянии от центра шара расположены данные секущие плоскости?

48. Даны шар с радиусом R и секущая плоскость. Известно, что площадь полной поверхности меньшей части шара, отсекаемой данной плоскостью, в k раз меньше площади поверхности шара. Определить расстояние от центра шара до данной секущей плоскости.

49. Около шара с радиусом r описан конус, высота которого в два раза больше диаметра шара. Найти объем и полную поверхность конуса.

50. Найти объем и полную поверхность конуса, вписанного в тетраэдр с ребром a .

51. Правильный тетраэдр вписан в цилиндр так, что одно из его ребер совпадает с образующей цилиндра. Найти объем цилиндра, если длина ребра тетраэдра равна a .

52. Три шара касаются плоскости треугольника со сторонами a , b , c в его вершинах и попарно касаются друг друга. Найти радиусы шаров.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1. АРИФМЕТИКА. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. 126 способов.

Решение. Искомое число способов равно числу способов распределения без ограничений оставшихся четырех подарков между 6 детьми. Четыре подарка можно разбить на группы следующим образом:

$$4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

В первом случае 4 подарка можно отдать каждому из 6 детей, что составляет 6 вариантов. Во втором случае 3 подарка можно отдать каждому из 6 детей, а последний — каждому из оставшихся 5 детей, что приводит к 30 вариантам. Разбиение $4 = 2 + 2$ дает $\frac{6 \cdot 5}{2}$ вариантов, $4 = 2 + 1 + 1$ — $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2}$ вариантов, а разбиение $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ — $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ вариантов. В результате получаем $6 + 30 + 15 + 60 + 15 = 126$ способов.

2. 287 способов.

Решение. Так как 8 игрушек распределяются между 7 детьми, только один ребенок (любой из 7) получает 2 игрушки. Эти две игрушки могут быть двумя машинами, машиной и куклой, двумя куклами.

Если один ребенок получает 2 машины, то еще одна машина может быть вручена любому из 6 детей, что составляет $7 \cdot 6 = 42$ варианта. Если же один ребенок получает машину и куклу, то еще две машины можно распределить среди 6 детей $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами, что приводит к $7 \cdot 15 = 105$ вариантам распределения игрушек. Наконец, если один ребенок получает 2 куклы, то оставшиеся 3 куклы можно распределить среди 6 детей $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$ способами, что приводит к $7 \cdot 20 = 140$ вариантам. В результате получаем $42 + 105 + 140 = 287$ способов распределения игрушек.

3. 26 250 вариантов.

Решение. Так как число шаров на 2 превышает число урн, возможны два случая распределения в них шаров: либо в одной урне содержатся 3 шара, а в остальных – по одному, либо в двух урнах – по два шара, а в остальных – по одному.

В первом случае 3 шара, находящиеся в одной урне, могут быть одного цвета (белые или черные). Кроме того, возможен также случай, когда в урне имеются два черных и один белый шар или, наоборот, один черный и два белых. Если 3 шара одного цвета содержатся в одной из 10 урн, то остальные 3 шара того же цвета необходимо распределить в других 9 урнах в соответствии с условием задачи, что дает нам $10 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 840$ вариантов. Если же в одной из 10 урн – два черных шара и один белый, то остальные черные шары распределяются по одному в любых из 9 урн, что приводит к $10 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1260$ вариантам. Аналогично рассматривается случай одного черного и двух белых шаров. Следовательно, если в одной урне оказывается 3 шара, то это нам дает $2(1260 + 840) = 4200$ вариантов.

Во втором случае распределение 4 шаров (с учетом их цвета) в двух урнах приводит к рассмотрению следующих возможностей: 2 черных + 2 черных, 2 ч. + (1ч. + 1б.), 2 ч. + 2б., (1ч. + 1б.) + (1ч. + 1б.), (1ч. + 1б.) + 2б., 2б. + 2б., что дает нам

$$\begin{aligned} & \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} + 10 \cdot 9 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} + 10 \cdot 9 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \\ & + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = \\ & = 1260 + 5040 + 6300 + 3150 + 5040 + 1260 = 22050 \end{aligned}$$

вариантов.

Таким образом, $4200 + 22050 = 26250$ вариантов.

4. 1 770 вариантов.

Решение. В соответствии с разбиениями

$$3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1,$$

$$4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

которым подвергаются 3 белых и 4 черных шаров при распределении по урнам, необходимо рассмотреть несколько случаев. Так, если 3 белых шара имеются в одной урне, а 4 черных шара – в другой, то это дает нам $6 \cdot 5 = 30$ способов распределения шаров. Если же 3 белых шара имеются в одной урне, 3 черных шара – в другой, а один черных шар – в третьей урне, то получаем $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов распределения шаров. Если 3 белых шара имеются в одной урне, а в двух других урнах содержатся по два черных шара, то получаем $6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 60$ способов распределения шаров. Аналогично рассматриваются и другие варианты распределения. Если учесть все возможные случаи, то мы получаем

$$\begin{aligned}
 & 30 + 120 + 60 + 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 6 \cdot 5 \cdot 4 + \\
 & + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + 6 \cdot 5 + \\
 & \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = \\
 & = 30 + 120 + 60 + 180 + 30 + 120 + 360 + 180 + 360 + \\
 & + 30 + 60 + 120 + 60 + 60 = 1770
 \end{aligned}$$

вариантов.

5. 5 274 числа.

Решение. Каждое целое число n , меньшее, чем 10 000, имеет следующую запись в десятичной системе:

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1,$$

где $1 \leq k \leq 4$, $a_k \neq 0$. Кроме того, по условию задачи все цифры a_1, \dots, a_k разные. Определим, сколько может быть таких чисел из k цифр. Ясно, что в качестве первой цифры можно выбрать любую из 9 цифр от 1 до 9. При выбранном a_k для остальных цифр можно использовать любые $(k-1)$ цифр из оставшихся 9 цифр. С учетом порядка их расположения получаем 9, $9 \cdot 8$ и $9 \cdot 8 \cdot 7$ возможностей для $k = 2, 3$ и 4

соответственно. Всего имеем $9(1 + 9 + 72 + 504) = 5274$ числа.

6. 7 380 чисел.

Решение. Каждое целое положительное число n , меньшее, чем 10 000, имеет следующую запись в десятичной системе:

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1,$$

где $1 \leq k \leq 4$, $a_k \neq 0$. Определим, сколько может быть таких чисел из k цифр, где любые две соседние цифры разные. Ясно, что в качестве первой цифры a_k можно выбрать любую из 9 цифр от 1 до 9. При выбранном a_k можно использовать для a_{k-1} любую из 10 цифр, отличных от a_k . Далее, при выбранном a_{k-1} можно использовать для a_{k-2} любую из 10 цифр, отличных от a_{k-1} , и т.д. В результате получаем 9^k чисел, а всего имеем $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 9 + 81 + 729 + 6561 = 7380$ чисел.

7. $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ способов.

Решение. Изобразим шары в виде ряда из n последовательных точек, а границы между пронумерованными ящиками — в виде $(k-1)$ вертикальных черточек, расположенных между точками. Например, схема



изображает распределение, при котором в первом ящике содержатся 2 шара, во втором — 1, в третьем шары отсутствуют, в четвертом — 4 шара, а в пятом — один. Если теперь перенумеровать точки и черточки сплошной нумерацией от 1 до $n + k - 1$, то каждый способ размещения шаров по ящикам будет соответствовать выбору $k - 1$ чисел из $n + k - 1$, а последних будет $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$.

8. $\frac{k!}{(2n-k)!((k-n)!)^2}$ способов.

Решение. Существует $\frac{k!}{n!(k-n)!}$ способов размещения n белых шаров по k ящикам так, чтобы в каждом ящике либо не

было шаров, либо имелся только один белый шар. Для любого такого размещения белых шаров остается $k - n$ ящиков, в которых нет белых шаров, поэтому необходимо в таких ящиках поместить по одному черному шару. Остальные $2n - k$ черных шаров мы должны разместить в тех ящиках, где уже имеются белые шары. Ясно, что указанные размещения можно осуществить $\frac{n!}{(2n-k)!(k-n)!}$ способами. В результате получаем

$$\frac{k!}{n!(k-n)!} \cdot \frac{n!}{(2n-k)!(k-n)!} = \frac{k!}{(2n-k)!((k-n)!)^2}$$

способов размещения шаров, удовлетворяющих условию задачи.

9. 1596 г.

Решение. Запишем искомый год в виде выражения $1xyz$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. Иначе, искомый год равен $1000 + 100x + 10y + z$. По условию задачи

$$(1000 + 100x + 10y + z) + 5355 = 1000z + 100y + 10x + 1.$$

Отсюда следует, что $z + 5$ есть число, запись которого в цифрах оканчивается на 1. Это может быть только при $z = 6$. В результате получаем

$$1000 + 100x + 10y + 6 + 5355 = 6000 + 100y + 10x + 1,$$

откуда $100x + 10y + 361 = 100y + 10x + 1$, $90x + 360 = 90y$ и $x + 4 = y$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ y + x = 14, \end{cases}$$

откуда $y = 9$, $x = 5$.

Примечание. В 1596 г. родился Рене Декарт.

10. 1829 г.

Решение. Записав искомый год в виде $1xyz$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц, получаем

$$(1000 + 100x + 10y + z) + 7452 = 1000z + 100y + 10x + 1.$$

Отсюда следует, что $z + 2$ есть число, запись которого в цифрах оканчивается на 1. Это может быть только при $z = 9$. Следовательно,

$$1000 + 100x + 10y + 9 + 7452 = 9000 + 100y + 10x + 1,$$

что приводит к уравнению $x = 6 + y$. Кроме того, по условию задачи $1 + x + y + 9$ делится на 5, поэтому $x + y$ также делится на 5.

Очевидно, что $x + y = 5, 10$ или 15 . Случай $x + y = 5$ нужно отбросить, так как $x \geq 6$. Таким образом, имеем системы уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 15. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x = 8, y = 2$, а из второй системы получаем, что $2x = 21$. Последнее уравнение не имеет решений в целых числах.

Примечание. В 1829 г. родился Иван Михайлович Сеченов.

11. 30 лет., 18 лет.

Решение. Пусть один рабочий изготавливает за 1ч x деталей, а второй — y деталей. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{60}{x} + \frac{4}{3} = \frac{60}{y}, \\ \frac{120}{x + y} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x + y = 48$, т.е. $y = 48 - x$. Подставляя это y в первое уравнение системы, после преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 + 42x - 2160 = 0$. Следовательно, $x = -21 \pm \sqrt{2601} = -21 \pm 51$, т.е. $x = 30$ или $x = -72$. Ясно, что второе решение является посторонним.

Таким образом, $x = 30$ лет., $y = 48 - 30 = 18$ лет.

12. 12 мин, 18 мин.

Решение. Пусть один рабочий изготавливает одну деталь за x минут, а второй – за $(x + 6)$ минут. Тогда имеем уравнение

$$\frac{360}{x} + \frac{360}{x + 6} = 50,$$

откуда после преобразований получаем квадратное уравнение $5x^2 - 42x - 216 = 0$. Следовательно,

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 1080}}{5} = \frac{21 \pm \sqrt{1521}}{5} = \frac{21 \pm 39}{5},$$

т.е. $x = \frac{21+39}{5} = 12$ или $x = \frac{21-39}{5} = -\frac{18}{5}$. Ясно, что второе решение квадратного уравнения является посторонним.

13. 2 ч 30 мин, 4 ч.

Решение. Пусть первая бригада изготавливает за 1 час x м³ дров, а вторая – y м³. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{40}{x} + 3 = \frac{40}{y}, \\ \frac{65}{x + y} = 5. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x + y = 13$, т.е. $y = 13 - x$. Подставляя это y в первое уравнение системы, после преобразований получаем квадратное уравнение $3x^2 + 41x - 520 = 0$. Следовательно,

$$x = \frac{-41 \pm \sqrt{7921}}{6} = \frac{-41 \pm 89}{6},$$

т.е. $x = \frac{-41+89}{6} = 8$ или $x = \frac{-41-89}{6} = -\frac{65}{3}$. Второе решение квадратного уравнения является посторонним.

Таким образом, $x = 8$ и $y = 13 - 8 = 5$, поэтому $20/8 = 5/2$ ч = 2 ч 30 мин, $20/5 = 4$ ч.

14. 2 ч 24 мин, 4 ч.

Решение. Если одна бригада разгружает вагон за x минут, а вторая – за $(x + 96)$ мин, то по условию задачи имеем уравнение

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+96}} = 90.$$

После преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 - 84x - 8640 = 0$.

Следовательно,

$$x = 42 \pm \sqrt{1764 + 8640} = 42 \pm \sqrt{10404} = 42 \pm 102,$$

т.е. $x = 42 + 102 = 144$ или $x = 42 - 102 = -60$. Ясно, что второе решение квадратного уравнения является посторонним.

Таким образом, $x = 144$ мин = 2 ч 24 мин, а вторая бригада разгружает вагон за $144 + 96 = 240$ мин = 4 ч.

15. 12 дней, 8 дней.

Решение. Если x дней – время выполнения заказа одним заводом, а $(x - 4)$ дней – время выполнения заказа другим заводом, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{5}{24},$$

откуда после преобразований получаем квадратное уравнение $5x^2 - 68x + 96 = 0$. Следовательно, $x = \frac{34 \pm \sqrt{676}}{5} = \frac{34 \pm 26}{5}$, т.е. $x = 12$ или $x = 8/5$. Второе решение квадратного уравнения является посторонним, так как $8/5 - 4 < 0$.

16. 2 ч 12 мин, 1 ч 50 мин.

Решение. Если x минут – время наполнения чана через кран B , а $(x + 22)$ мин – время наполнения чана через кран A , то справедливо следующее "уравнение чана":

$$60 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+22} \right) = 1.$$

Из этого уравнения в результате преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 - 98x - 1320 = 0$. Следовательно,

$x = 49 \pm \sqrt{3721} = 49 \pm 61$, т.е. $x = 110$ или $x = -12$. Второе решение квадратного уравнения является посторонним. Таким образом, $x = 110$ мин = 1 ч 50 мин и $x + 22 = 132$ мин = 2 ч 12 мин.

17. 14 человек.

Решение. Пусть x – число рабочих в бригаде, y – первоначальная выработка каждого рабочего по сравнению с плановой, %. Тогда

$$\begin{cases} xy = 98, \\ (x - 3) \left(y + \frac{1}{20} \cdot 100 \right) = 132. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $xy + 5x - 3y = 147$. Подставляя $xy = 98$ в последнее уравнение, имеем $5x - 3y = 49$, и, следовательно, $y = \frac{1}{3}(5x - 49)$. Если это значение y подставить в первое уравнение системы, то получим квадратное уравнение $5x^2 - 49x - 294 = 0$, откуда $x = \frac{49 \pm \sqrt{8281}}{10} = \frac{49 \pm 91}{10}$, $x = 14$ или $x = -42/10$. Второй корень является посторонним.

18. 13 и 15 рабочих.

Решение. Пусть x – число рабочих в первой бригаде, y – число деталей, изготавливаемых одним рабочим первой бригады за смену. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 65, \\ (x + 2)(y + 3) = 120. \end{cases}$$

Второе уравнение запишем в виде $xy + 3x + 2y = 114$ и подставим $xy = 65$. В результате $3x + 2y = 49$, поэтому $y = (49 - 3x)/2$. Подставив это значение для y в первое уравнение системы, после преобразований получим квадратное уравнение $3x^2 - 49x + 130 = 0$. Следовательно, $x = \frac{49 \pm \sqrt{841}}{6} = \frac{49 \pm 29}{6}$, $x = 13$ или $x = 10/3$. Решение квадратного уравнения $x = 10/3$ является посторонним, так как число рабочих есть целое число.

19. $28 \text{ м}^3/\text{мин.}$

Решение. Если $x \text{ м}^3/\text{мин}$ – первоначальная производительность каждой трубы, то $\frac{1}{5x} = \frac{1}{7(x-8)}$, т.е. $5x = 7(x-8)$, откуда получаем $x = 28 \text{ м}^3/\text{мин.}$

20. 40 т/ч.

Решение. Если $x \text{ т/ч}$ – производительность каждого крана, то $\frac{1}{6x} = \frac{1}{4(x+20)}$, т.е. $6x = 4(x+20)$, откуда получаем $x = 40 \text{ т/ч.}$

21. $80 \text{ м}^3.$

Решение. Пусть бригада лесорубов ежедневно заготавливала $x \text{ м}^3$ дров. Тогда

$$\frac{400}{x} = \frac{400}{x-30} - 3,$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned} 400(x-30) &= 400x - 3x(x-30), \\ 400x - 12\,000 &= 400x - 3x^2 + 90x, \\ 3x^2 - 90x - 12\,000 &= 0, \\ x^2 - 30x - 4\,000 &= 0. \end{aligned}$$

Квадратное уравнение имеет решения $x = 15 \pm \sqrt{4225} = 15 \pm 65$, $x_1 = 80$ и $x_2 = -50$. Очевидно, что корень $x = -50$ является посторонним.

22. 6 дней.

Решение. Если $x \text{ га}$ – ежедневная производительность каждого трактора, то

$$\frac{900}{6x} = \frac{900}{12(x+2,5)} + 9,$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned}\frac{100}{6x} &= \frac{130 + 12x}{12x + 30}, \\ 1200x + 3000 &= 72x^2 + 780x, \\ 72x^2 - 420x - 3000 &= 0, \\ 6x^2 - 35x - 250 &= 0.\end{aligned}$$

Квадратное уравнение имеет решения

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 + 6000}}{12} = \frac{35 \pm \sqrt{7225}}{12} = \frac{35 \pm 85}{12},$$

т.е. $x = 10$ или $x = -25/6$. Ясно, что второй корень является посторонним. Следовательно, $x = 10$, поэтому $\frac{900}{6x} - 9 = \frac{900}{60} - 9 = 15 - 9 = 6$ дн.

23. 80 шт. рыбы в минуту.

Решение. Пусть новая машина в минуту разделявает x шт. рыбы. Тогда имеем уравнение для неизвестной x :

$$\frac{26000}{x - 15} - \frac{26000}{x} = 75,$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned}26000x - 26000x + 390000 &= 75x^2 - 1125x, \\ 75x^2 - 1125x - 390000 &= 0, \\ x^2 - 15x - 5200 &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 20800}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{21025}}{2} = \frac{15 \pm 145}{2},$$

$x = 80$ или $x = -65$.

Здесь $x = -65$ является посторонним решением.

24. 760 кг.

Решение. Пусть для изготовления одного автомобиля требуется x кг металла. Тогда получаем уравнение для неизвестной x :

$$\frac{15\,960}{x} - \frac{15\,960}{x + 80} = 2,$$

откуда $15\,960x - 15\,960x + 1\,276\,800 = 2x^2 + 160x$, т.е.

$$x^2 + 80x - 638\,400 = 0.$$

Следовательно, $x = -40 \pm \sqrt{1600 + 638\,400} = -40 \pm \sqrt{640\,000} = -40 \pm 800$, $x = 760$ или $x = -840$. Здесь корень $x = -840$ является посторонним решением.

25. 26 деталей.

Решение. Пусть x — число деталей, которые по плану должен изготавливать рабочий за один день. Тогда весь заказ рабочий должен выполнить за $260/x$ дней. Следовательно, для неизвестной x получаем уравнение

$$2x + (x + 10) \left(\frac{260}{x} - 4 \right) = 268,$$

которое после преобразований сводится к квадратному уравнению

$$x^2 + 24x - 1300 = 0.$$

В результате $x = -12 \pm \sqrt{144 + 1300} = -12 \pm 38$, $x = 26$ или $x = -50$. Здесь $x = -50$ является посторонним решением.

26. 15 кг.

Решение. Пусть x — масса детали нового типа. Тогда для неизвестной x имеем уравнение

$$\frac{600}{x} = 25 + \frac{600}{2x + 10},$$

откуда после преобразований получаем квадратное уравнение

$$x^2 - 7x - 120 = 0.$$

Следовательно, $x = \frac{7 \pm \sqrt{49+480}}{2} = \frac{7 \pm 23}{2}$, $x = 15$ или $x = -8$.
Здесь второе решение $x = -8$ является посторонним.

27. 3 ч, 4 ч.

Решение. Если x часов – время, за которое может выполнить работу первая бригада, то

$$\frac{7/8}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}} + \frac{1/8}{\frac{1}{x+1}} = 2.$$

Это уравнение в результате преобразований сводится к квадратному уравнению $9x^2 - 22x - 15 = 0$. Следовательно, $x = \frac{11 \pm \sqrt{121+135}}{9} = \frac{11 \pm \sqrt{256}}{9} = \frac{11 \pm 16}{9}$, $x = 3$ или $x = -5/9$.
Ясно, что $x = -5/9$ – посторонний корень.

28. 8 ч, 7 ч.

Решение. Если x часов – время, в течение которого может разгрузить состав один подъемный кран, а $(x - 1)$ часов – соответствующее время для другого подъемного крана, то

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}} = 3\frac{44}{60},$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{2x-1} &= \frac{56}{15}, \\ 15x(x-1) &= 56(2x-1), \\ 15x^2 - 127x + 56 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \frac{127 \pm \sqrt{16129 - 3360}}{30} = \frac{127 \pm \sqrt{12769}}{30} = \\ &= \frac{127 \pm 113}{30}; \quad x = 8 \quad \text{или} \quad x = 7/15. \end{aligned}$$

Очевидно, что $x = 7/15$ – постороннее решение, так как $7/15 - 1 < 0$.

29. 2 ч 40 мин.

Решение. Пусть Q кг – масса картофеля на поле, x и y – массы картофеля, убираемого за 1 час первой и второй бригадами соответственно. Тогда имеем уравнения

$$\frac{Q}{x+y} = 2, \quad 12 \left(\frac{Q}{x} - 2 \right) = \frac{Q}{y}.$$

Следовательно,

$$\frac{Q}{y} = 12 \left(\frac{Q}{x} - \frac{Q}{x+y} \right) = \frac{12Qy}{x(x+y)},$$

поэтому

$$\frac{1}{12} = \frac{y^2}{x(x+y)} = \frac{1}{q(q+1)},$$

где $q = x/y$. В результате для q получаем квадратное уравнение $q^2 + q - 12 = 0$, которое имеет решения $q = 3$ и $q = -4$. Здесь $q = -4$ есть постороннее решение. Если же $q = 3$, то

$$2 = \frac{Q}{x+y} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{1}{1+q^{-1}} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{Q}{x} \cdot \frac{3}{4},$$

поэтому искомая величина $\frac{Q}{x} = \frac{8}{3}$ ч = 2 ч 40 мин.

30. 5 тонн.

Решение. Пусть первая бригада собирала за 1 час x тонн свеклы. Тогда для неизвестной x имеем уравнение

$$\frac{20}{x} = \frac{20}{x-2} - 2\frac{40}{60},$$

откуда последовательно получаем равносильные уравнения:

$$20 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{8}{3}, \quad 120 = 8x(x-2), \quad x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Следовательно, $x = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$, т.е. $x = 5$ или $x = -3$. Здесь решение $x = -3$ является посторонним.

31. 25 комплексов.

Решение е. Пусть в районе имеется x зерноочистительных комплексов. Тогда по условию задачи для x получаем уравнение

$$\frac{240}{0,1(x-9)} - \frac{285}{0,1x} = 36,$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{2400}{x-9} - \frac{2850}{x} &= 36, \\ 2400x - 2850x + 25650 &= 36x^2 - 324x, \\ 36x^2 + 126x - 25650 &= 0, \\ 2x^2 + 7x - 1425 &= 0,\end{aligned}$$

поэтому

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 11400}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{11449}}{4} = \frac{-7 \pm 107}{4};$$

$x = 25$ или $x = -57/2,$

при этом корень $x = -57/2$ является посторонним.

32. 300 комбайнов.

Решение е. Пусть в районе имеется в настоящее время x комбайнов. Тогда по условию задачи получаем для x уравнение

$$\frac{36000}{x} - \frac{39600}{x+60} = 10,$$

откуда

$$\begin{aligned}36000x + 2160000 - 39600x &= 10x^2 + 600x, \\ 10x^2 + 4200x - 2160000 &= 0, \\ x^2 + 420x - 216000 &= 0,\end{aligned}$$

поэтому

$$x = -210 \pm \sqrt{44\,100 + 216\,000} = -210 \pm \sqrt{260\,100} = \\ = -210 \pm 510; \quad x = 300 \quad \text{или} \quad x = -720,$$

при этом $x = -720$ – постороннее решение.

33. 90 м^2 , 70 м^2 .

Решение. Если $x \text{ м}^2$ – площадь первой теплицы, то по условию задачи имеем для неизвестной x уравнение

$$\frac{1080}{x} + 2 = \frac{980}{x - 20},$$

откуда получаем равносильное квадратное уравнение

$$x^2 + 30x - 10\,800 = 0.$$

Следовательно,

$$x = -15 \pm \sqrt{225 + 10\,800} = -15 \pm \sqrt{11\,025} = \\ = -15 \pm 105; \quad x = 90 \quad \text{или} \quad x = -120,$$

при этом решение $x = -120$ является посторонним.

34. 18 кг , 22 кг .

Решение. Пусть в первой теплице с 1 м^2 собрали x килограммов огурцов. Тогда во второй теплице с той же площади собрали $(x + 4)$ килограммов огурцов. Следовательно, общая площадь теплиц равна $\left(\frac{1800}{x} + \frac{1320}{x+4}\right) \text{ м}^2$. В результате для искомой величины x получаем уравнение

$$\frac{1800}{x} + \frac{1320}{x+4} = 160,$$

откуда

$$1800x + 7200 + 1320x = 160x^2 + 640x, \\ 160x^2 - 2480x - 7200 = 0, \\ 2x^2 - 31x - 90 = 0.$$

Таким образом,

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{961 + 720}}{4} = \frac{31 \pm \sqrt{1681}}{4} = \frac{31 \pm 41}{4};$$
$$x = 18 \quad \text{или} \quad x = -\frac{5}{2}.$$

Здесь второй корень квадратного уравнения является посторонним.

35. Сплавы колец следует взять в отношении 2:3.

Решение. Пусть новое кольцо содержит x -ю часть первого кольца и y -ю часть второго. Тогда в нем содержится $(\frac{2}{5}x + \frac{9}{10}y)$ -я часть золота и $(\frac{3}{5}x + \frac{1}{10}y)$ -я часть серебра. Следовательно,

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{9}{10}y}{\frac{3}{5}x + \frac{1}{10}y} = \frac{7}{3},$$

поэтому для $t = x/y$ получаем уравнение $3(4t+9) = 7(6t+1)$, т.е. $12t + 27 = 42t + 7$, $20 = 30t$, $t = 2/3$.

36. 30%, 60%.

Решение. Пусть $x\%$ – массовая доля меди в первом сплаве. Тогда $\frac{8}{x} \cdot 100$ килограммов – масса первого сплава, а $\frac{14}{x+30} \cdot 100$ кг – масса второго сплава. Следовательно, по условию задачи имеем уравнение

$$\frac{22}{\frac{800}{x} + \frac{1400}{x+30}} = 0,44.$$

Из этого уравнения после преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 - 14x - 480 = 0$, откуда $x = 7 \pm \sqrt{529} = 7 \pm 23$, т.е. $x = 30$ или $x = -16$. Здесь $x = -16$ – постороннее решение.

37. 500 г, 0,64.

Решение. Пусть m – первоначальная масса сплава, г, а x – его проба. Тогда имеем соотношения

$$\frac{mx + 100}{m + 100} = 0,7; \quad \frac{mx + 40}{m + 100} = 0,6.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $\frac{60}{m+100} = 0,1$, откуда $600 = m + 100$, и, таким образом, $m = 500$ г. Кроме того, из второго уравнения следует, что $mx = 0,6m + 20$, поэтому $500x = 320$ и $x = 0,64$.

38. 0,6; 0,8.

Решение. Если m – масса каждого слитка, в граммах, x – проба первого слитка, y – проба второго слитка, то первый слиток сплавляют с $m(1-y)$ граммами меди, а второй – с $m(1-x)$ граммами меди. В результате получаем соотношения

$$\frac{m(2-y)}{m(2-x)} = \frac{6}{7}, \quad \frac{mx}{m(2-y)} \cdot \frac{m(2-x)}{my} = \frac{7}{8},$$

т.е.

$$\frac{2-y}{2-x} = \frac{6}{7}, \quad \frac{x}{y} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2-y}{2-x} = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, $7(2-y) = 6(2-x)$ и $y = \frac{4}{3}x$, поэтому $7(2 - \frac{4}{3}x) = 6(2-x)$. Из последнего уравнения легко найти x : $7(6-4x) = 18(2-x)$, $42-28x = 36-18x$, $6 = 10x$, $x = 0,6$. Наконец, $y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot 0,6 = 0,8$.

39. 4 кг ; 17,5%.

Решение. Пусть m – общая масса смеси, в килограммах, x – содержание в ней титана, %. Тогда из условий задачи находим

$$m - \frac{mx}{100} = 3,3; \quad \frac{\frac{mx}{100} + \frac{2 \cdot 25}{100}}{m+2} \cdot 100 = 20,$$

откуда

$$100m - mx = 330, \quad mx + 50 = 20m + 40.$$

Складывая левые и правые части этих уравнений, получаем $100m + 50 = 370 + 20m$, откуда $80m = 320$, т.е. $m = 4$ кг. Наконец, из первого уравнения системы имеем

$$x = \frac{4 - 3,3}{4} \cdot 100 = 0,7 \cdot 25 = 17,5.$$

40. 1,2 кг ; 2 кг.

Решение. Если мы возьмем x килограммов порошка из ящика, содержащего 20% железа, и y кг порошка из ящика, содержащего 12% железа, то по условию задачи для неизвестных x и y имеем систему уравнений

$$x + y = 3,2; \quad \frac{20}{100}x + \frac{12}{100}y = \frac{15}{100} \cdot 3,2,$$

т.е. $x + y = 3,2$; $20x + 12y = 48$. Умножая обе части первого уравнения на 20, получаем $20x + 20y = 64$, поэтому $8y = 64 - 48 = 16$, т.е. $y = 2$ кг и $x = 3,2 - y = 3,2 - 2 = 1,2$ кг.

41. $\frac{p+3q}{50}$ кг.

Решение. Если в каждом ящике сначала было x кг порошка, то по условию задачи имеем соотношение

$$3 \left(\frac{(x-2)p}{100} + \frac{2q}{100} \right) = 2 \left(\frac{(x-2)p}{100} + \frac{6q}{100} \right),$$

поэтому после преобразований получаем для неизвестной x уравнение $px = 2p + 6q$. Следовательно, $x = \frac{2p+6q}{p}$, поэтому в каждом ящике первоначально было $\frac{2p+6q}{p} \cdot \frac{p}{100} = \frac{p+3q}{50}$ кг висмута.

42. $\frac{25q-16p}{9}\%$.

Решение. Пусть x — первоначальное содержание фосфора в смеси, %. Тогда после первого перемешивания мы получаем смесь, для которой содержание фосфора

$$r = \frac{\frac{x}{100} \cdot 3 + \frac{p}{100} \cdot 2}{5} \cdot 100 = \frac{3x + 2p}{5}\%.$$

Следовательно, по условию задачи имеем соотношение

$$\frac{\frac{r}{100} \cdot 3 + \frac{p}{100} \cdot 2}{5} \cdot 100 = q,$$

т.е. $5q = 3r + 2p = 3 \cdot \frac{3x+2p}{5} + 2p = \frac{9x+16p}{5}$.

В результате для неизвестной x получаем уравнение $25q = 9x + 16p$, откуда $x = \frac{25q-16p}{9}$.

43. 30%, 45%.

Решение. Если x – массовая доля медного купороса в первой смеси, %, то во второй – $(x + 15)\%$. Следовательно, первая смесь весит $\frac{3}{x} \cdot 100$, а вторая – $\frac{9}{x+15} \cdot 100$ граммов. Но 12 г составляют $(\frac{3}{x} \cdot 100 + \frac{9}{x+15} \cdot 100)\%$, поэтому для неизвестной x имеем уравнение

$$\frac{12}{(\frac{3}{x} + \frac{9}{x+15}) \cdot 100} = 0,4.$$

После преобразований это уравнение сводится к квадратному уравнению $x^2 - 25x - 150 = 0$, поэтому $x = \frac{25 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{25 \pm 35}{2}$, т.е. $x = 30$ или $x = -5$. Здесь второе решение $x = -5$ является посторонним.

Таким образом, $x = 30$ и $x + 15 = 45$.

44. 12 мин, 6 мин.

Решение. Так как время течения реакции обратно пропорционально скорости реакции, а скорость реакции пропорциональна массе катализатора, то справедливо равенство

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t},$$

где t_1 , t_2 и t – время продолжения реакции в присутствии первой порции катализатора, второй порции и обеих порций катализатора соответственно. По условию задачи $t = 4$ мин, $t_1 = t_2 + 6$, поэтому для неизвестной величины t_2 получаем уравнение

$$\frac{1}{t_2 + 6} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{4},$$

которое после преобразований сводится к квадратному уравнению

$$t_2^2 - 2t_2 - 24 = 0.$$

Следовательно, $t_2 = 1 \pm \sqrt{1 + 24} = 1 \pm 5$, т.е. $t_2 = 6$ или $t_2 = -4$. Здесь $t_2 = -4$ является посторонним решением.

Таким образом, $t_2 = 6$ мин, $t_1 = t_2 + 6 = 12$ мин.

45. $\frac{(k-1)pv}{(k-1)p+(2-k)q}$ литров.

Решение. Пусть израсходовано x литров q -процентного раствора. Тогда $\frac{(v-x)p+xq}{v}\%$ – крепость раствора после переливания, а $\frac{(v-x)p+2xq}{v}\%$ – крепость раствора после условного переливания, поэтому по условию задачи

$$k \frac{(v-x)p+xq}{v} = \frac{(v-x)p+2xq}{v},$$

т.е.

$$k(v-x)p+kxq=(v-x)p+2xq.$$

Имеем $v(k-1)p = x((2-k)q+(k-1)p)$, поэтому $x = \frac{(k-1)pv}{(k-1)p+(2-k)q}$.

Отметим, что $x/v \leq 1$, а $k > 1$. Следовательно, $2-k \geq 0$, т.е. $k \leq 2$.

46. $\frac{a}{1-\sqrt{\frac{r-q}{p-q}}}$ литров.

Решение. Пусть x литров – емкость сосуда. Считаем, что после первого переливания получится раствор крепостью $r_1\%$. Тогда

$$\frac{(x-a)p+aq}{x} = r_1, \quad \frac{(x-a)r_1+aq}{x} = r.$$

Умножив первое соотношение на $\frac{x-a}{x}$ и просуммировав со вторым, получаем

$$\left(\frac{x-a}{x}\right)^2 p + \frac{aq}{x} \left(\frac{x-a}{x}\right) + \frac{x-a}{x} r_1 + \frac{aq}{x} = \frac{x-a}{x} r_1 + r.$$

Подставляя в последнее соотношение $\frac{a}{x} = 1 - \frac{x-a}{x}$, имеем

$$\left(\frac{x-a}{x}\right)^2 p + q \left(1 - \frac{x-a}{x}\right) \left(\frac{x-a}{x}\right) + q \left(1 - \frac{x-a}{x}\right) = r.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{x-a}{x}\right)^2 (p-q) = r-q \quad \text{и} \quad 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x} = \sqrt{\frac{r-q}{p-q}},$$

поэтому

$$x = \frac{a}{1 - \sqrt{\frac{r-q}{p-q}}}.$$

47. 3 суток.

Решение. Пусть x суток – продолжительность первого промежутка времени. Тогда за второй промежуток увеличение сульфата кадмия составляет $15\left(1 + \frac{4}{100}x\right) \cdot \frac{5}{100}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ граммов. Следовательно, имеем уравнение

$$15\left(1 + \frac{4}{100}x\right) \cdot \frac{5}{100}\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2,475.$$

Это уравнение после преобразований сводится к квадратному уравнению $2x^2 + 51x - 140 = 0$. Таким образом,

$$x = \frac{-51 \pm \sqrt{2601 + 1120}}{4} = \frac{-51 \pm \sqrt{3721}}{4} = \frac{-51 \pm 61}{4},$$
$$x_1 = 5/2 \quad \text{и} \quad x_2 = -28.$$

При этом решение $x_2 = -28$ – постороннее. В результате получаем $x = 5/2$, а продолжительность второго промежутка времени $x + 1/2 = 5/2 + 1/2 = 3$ суток.

48. 3%.

Решение. Пусть в течение первых суток увеличение массы чистой ртути составляет $x\%$. Тогда в течение вторых суток масса чистой ртути увеличилась на $20\left(1 + \frac{x}{100}\right) \frac{x+5}{100}$ граммов. Следовательно, получаем уравнение для неизвестной x :

$$20\left(1 + \frac{x}{100}\right) \frac{x+5}{100} = 1,648.$$

Это уравнение после преобразований сводится к квадратному уравнению $x^2 + 105x - 324 = 0$. Таким образом,

$$x = \frac{-105 \pm \sqrt{11\,025 + 1296}}{2} = \frac{-105 \pm \sqrt{12\,321}}{2} = \\ = \frac{-105 \pm 111}{2}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -108.$$

При этом $x_2 = -108$ – постороннее решение.

49. 50 км/ч, 40 км/ч.

Решение. Пусть v_1 и v_2 – скорости поездов, вышедших из городов A и B соответственно. Тогда из условий задачи имеем уравнения

$$600 - 6v_1 - 6v_2 = 60, \quad \frac{300}{v_1} + \frac{3}{2} = \frac{300}{v_2}.$$

Из первого уравнения получаем $v_1 + v_2 = 90$, т.е. $v_2 = 90 - v_1$. В то же время из второго уравнения следует

$$v_2 = \frac{100}{\frac{100}{v_1} + \frac{1}{2}} = \frac{200v_1}{200 + v_1}.$$

Таким образом, для неизвестной v_1 получаем уравнение

$$90 - v_1 = \frac{200v_1}{200 + v_1},$$

которое после преобразований сводится к квадратному уравнению $v_1^2 + 310v_1 - 18\,000 = 0$. Следовательно,

$$v_1 = -155 \pm \sqrt{24\,025 + 18\,000} = -155 \pm \sqrt{42\,025} = \\ = -155 \pm 205, \quad v_{11} = 50, \quad v_{12} = -360.$$

При этом второе решение $v_{12} = -360$ является посторонним.

В результате $v_1 = 50$ км/ч и $v_2 = 90 - v_1 = 90 - 50 = 40$ км/ч.

50. 30 км/ч.

Решение. Пусть v – первоначальная скорость поезда. Тогда для неизвестной величины v имеем уравнение

$$2 + \frac{1}{3} + \frac{120 - 2v}{v + 6} = \frac{120}{v}.$$

В результате последовательных преобразований получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{7}{3} + \frac{120 - 2v}{v + 6} &= \frac{120}{v}, \\ 7v(v + 6) + 3v(120 - 2v) &= 360(v + 6), \\ 7v^2 + 42v + 360v - 6v^2 &= 360v + 2160, \\ v^2 + 42v - 2160 &= 0,\end{aligned}$$

поэтому $v = -21 \pm 51$, $v_1 = 30$, $v_2 = -72$. Здесь корень $v_2 = -72$ – посторонний.

Таким образом, $v = 30$ км/ч.

51. 36 км/ч, 24 км/ч.

Решение. Пусть встреча поездов произошла через t часов с момента отправления. Тогда, обозначая через x и y искомые скорости, получаем соотношения

$$tx + ty = 180, \quad \frac{ty}{x} = 2, \quad \frac{tx}{y} = \frac{9}{2}.$$

Перемножая два последних соотношения, имеем $t^2 = 9$, и, значит, $t = 3$. Однако из первого соотношения следует, что $x + y = 60$, а из второго – $y/x = 2/3$, т.е. $y = 2x/3$. Таким образом, $x + 2x/3 = 60$ и $x = 36$. Наконец, $y = 60 - x = 60 - 36 = 24$.

52. 40 км/ч, 30 км/ч.

Решение. Пусть x и y , км/ч, – скорости пассажирского и товарного поездов соответственно. Тогда имеем систему уравнений

$$\frac{480}{x} + 4 = \frac{480}{y}, \quad \frac{480}{x + 8} + 5 = \frac{480}{y + 2},$$

т.е.

$$\frac{120 + x}{x} = \frac{120}{y}, \quad \frac{104 + x}{x + 8} = \frac{96}{y + 2}.$$

Из первого уравнения получаем $y = \frac{120x}{120+x}$. Подставляя это значение для y во второе уравнение, имеем

$$\frac{104 + x}{x + 8} = \frac{48(120 + x)}{61x + 120}.$$

Последнее уравнение после преобразований сводится к квадратному уравнению $13x^2 + 320x - 33\,600 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} x &= \frac{-160 \pm \sqrt{25\,600 + 436\,800}}{13} = \frac{-160 \pm \sqrt{462\,400}}{13} = \\ &= \frac{-160 \pm 680}{13}, \quad x_1 = 40, \quad x_2 = -\frac{840}{13}. \end{aligned}$$

Второе решение $x_2 = -840/13$ является посторонним.

Таким образом, $x = 40$ км/ч и $y = \frac{120x}{120+x} = \frac{120 \cdot 40}{160} = 30$ км/ч.

53. 1 : 2.

Решение. Пусть s – расстояние между пунктами A и B , t – время до встречи, x и y – скорости машин. Тогда

$$xt + yt = s, \quad 6\frac{yt}{x} = \frac{s}{y}.$$

Запишем систему в виде

$$\frac{s}{t} = x + y, \quad 6\frac{y}{x} = \frac{1}{y} \left(\frac{s}{t} \right)$$

и подставим значение для s/t из первого уравнения во второе. В результате получим

$$6\frac{y}{x} = \frac{1}{y}(x + y) = \frac{x}{y} + 1.$$

Следовательно, для новой переменной $z = y/x$ имеем уравнение $6z = 1/z + 1$, откуда получаем квадратное уравнение $6z^2 - z - 1 = 0$, поэтому $z = (1 \pm 5)/12$, $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{3}$. Ясно, что корень $z_2 = -1/3$ является посторонним.

54. 30 км/ч, $80/3$ км/ч.

Решение. Пусть v_1 – скорость автобуса и $v_2 = v_1 - 10/3$ – скорость троллейбуса. Если A и B – концы маршрута, из которых вышли автобус и троллейбус соответственно, а C – место их встречи, то $CB = 20 - x$, где $x = AC$. Следовательно, из условия задачи получаем соотношение $\frac{x}{v_1} = \frac{20-x}{v_2}$. Далее, расстояние $CB + BC$ автобус пройдет (с учетом стоянки) за $\left(\frac{2(20-x)}{v_1} + \frac{1}{6}\right)$ часов, а расстояние $CA + AC$ троллейбус пройдет за $\frac{2x}{v_2}$ часов. В результате имеем еще одно соотношение $\frac{20-x}{v_1} + \frac{1}{12} = \frac{x}{v_2}$. Исключая из этих соотношений x , после преобразований записываем уравнение для неизвестной v_1 :

$$\frac{20}{v_1 - 10/3} = \frac{20}{v_1} + \frac{1}{12},$$

которое сводится к квадратному уравнению $3v_1^2 - 10v_1 - 2400 = 0$.

Следовательно,

$$v_1 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 7200}}{3} = \frac{5 \pm \sqrt{7225}}{3} = \frac{5 \pm 85}{3},$$

$$v_{11} = 30, \quad v_{12} = -\frac{80}{3}.$$

Корень $v_{12} = -80/3$ является посторонним решением.

Таким образом, $v_1 = 30$ км/ч и $v_2 = v_1 - 10/3 = \frac{80}{3}$ км/ч.

55. 45 км/ч.

Решение. Пусть x – начальная скорость автомобиля. Тогда для неизвестной x имеем уравнение

$$\frac{360}{x} = \frac{360}{x + 15} + 2.$$

В результате преобразований из этого уравнения получаем квадратное уравнение $x^2 + 15x - 2700 = 0$. Следовательно,

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 10\,800}}{2} = \frac{-15 \pm \sqrt{11\,025}}{2} =$$

$$= \frac{-15 \pm 105}{2}, \quad x_1 = 45, \quad x_2 = -60.$$

Очевидно, что корень $x_2 = -60$ является посторонним.

56. 15 км/ч.

Решение. Пусть v – начальная скорость велосипедиста. Тогда по условию задачи для неизвестной v имеем уравнение

$$\frac{75 - 2v}{v + 5} + 2 + \frac{3}{4} = \frac{75}{v},$$

откуда последовательно получаем

$$4(75 - 2v)v + 11v(v + 5) = 300(v + 5),$$

$$300v - 8v^2 + 11v^2 + 55v = 300v + 1500,$$

$$3v^2 + 55v - 1500 = 0.$$

Следовательно,

$$v = \frac{-55 \pm \sqrt{3025 + 18\,000}}{6} = \frac{-55 \pm \sqrt{21\,025}}{6} =$$

$$= \frac{-55 \pm 145}{6}, \quad v_1 = 15, \quad v_2 = -\frac{100}{3}.$$

Второе решение $v_2 = -100/3$ является посторонним.

Таким образом, искомая скорость велосипедиста $v = 15$ км/ч.

57. 650 км/ч.

Решение. Пусть v – фактическая скорость самолета. Тогда по условию задачи для неизвестной v имеем уравнение

$$\frac{2860}{v - 130} = \frac{2860}{v} + \frac{11}{10},$$

откуда после преобразований получаем квадратное уравнение $v^2 - 130v - 338\,000 = 0$. Следовательно,

$$v = 65 \pm \sqrt{4225 + 338\,000} = 65 \pm \sqrt{342\,225} = 65 \pm 585, \\ v_1 = 650, \quad v_2 = -520,$$

где $v_2 = -520$ – постороннее решение.

58. 60 км/ч.

Решение. Пусть v – начальная скорость поезда. Тогда из условий задачи для неизвестной v имеем уравнение

$$\frac{150}{v} + \frac{150}{v + 12} + \frac{25}{60} = \frac{300}{v},$$

откуда в результате преобразований получаем равносильные уравнения:

$$\frac{30}{v + 12} + \frac{1}{12} = \frac{30}{v}, \\ 30 \cdot 12v + v(v + 12) = 30 \cdot 12(v + 12), \\ 360v + v^2 + 12v = 360v + 4320, \\ v^2 + 12v - 4320 = 0.$$

Следовательно,

$$v = -6 \pm \sqrt{36 + 4320} = -6 \pm \sqrt{4356} = -6 \pm 66, \\ v_1 = 60, \quad v_2 = -72,$$

где решение $v_2 = -72$ является посторонним.

59. 60 км/ч.

Решение. Пусть x – скорость машины, t – время ее движения до обгона первого мотоциклиста. Тогда по условию задачи имеем систему уравнений

$$40 \left(t + \frac{1}{2} \right) = xt, \quad 50 \left(t + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = x \left(t + \frac{3}{2} \right).$$

Подставляя $xt = 40t + 20$ во второе уравнение системы, находим $x = \frac{20t+160}{3}$. Если же это выражение для x подставить в первое уравнение системы, то после преобразований получим квадратное уравнение для неизвестной t : $t^2 + 2t - 3 = 0$. Следовательно, $t = 1$ или $t = -3$. Но $t = -3$ — посторонний корень.

Таким образом, $t = 1$, поэтому $x = (1 + 1/2) \cdot 40 = 60$ км/ч.

60. 80 км.

Решение. Пусть x — расстояние от A до B , v_1 и v_2 — скорости велосипедистов. Считаем, что $v_1 > v_2$. Тогда из условий задачи имеем уравнения

$$\frac{x - 20}{v_2} = \frac{x + 20}{v_1}, \quad \frac{2x + \frac{x}{2}}{v_1} = \frac{x + \frac{x}{2}}{v_2}.$$

Из второго уравнения получаем $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5}$, а из первого — $\frac{v_2}{v_1} = \frac{x-20}{x+20}$.

Таким образом, искомая величина x удовлетворяет уравнению

$$\frac{x - 20}{x + 20} = \frac{3}{5},$$

поэтому $5(x - 20) = 3(x + 20)$, $2x = 160$ и $x = 80$ км.

61. 336 км.

Решение. Пусть x — расстояние между пунктами A и B по первой дороге. Тогда из условия задачи следует

$$\frac{x}{64} + \frac{13}{12} = 3 + \frac{5}{6} + \frac{x - 3 \cdot 64 + 31}{64 + 6},$$

откуда последовательно получаем:

$$\frac{x}{64} + \frac{13}{12} = 3 + \frac{5}{6} + \frac{x}{70} - \frac{23}{10}, \quad x \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{70} \right) = \frac{9}{20},$$

$$\frac{6x}{64 \cdot 70} = \frac{9}{20}, \quad \frac{x}{112} = 3$$

и, значит, $x = 336$ км.

62. 96 км.

Решение. Пусть x – расстояние между пунктами A и B . Учитывая, что на обратном пути от B до A спуски для велосипедиста становятся подъемами, а подъемы – спусками, из условия задачи получаем уравнение для неизвестной x :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{14}{23}(x-50)}{\frac{30}{15}} + \frac{\frac{9}{23}(x-50)}{\frac{15}{30}} + \frac{50}{24} + \frac{1}{2} = \\ = \frac{\frac{14}{23}(x-50)}{15} + \frac{\frac{9}{23}(x-50)}{30} + \frac{50}{24} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из этого уравнения последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{32}{23}(x-50) + 10 &= \frac{37}{23}(x-50), \\ 32(x-50) + 230 &= 37(x-50), \\ 5(x-50) &= 230, \quad x-50 = 46, \quad x = 96. \end{aligned}$$

Таким образом, расстояние между пунктами A и B равно 96 км.

63. 19 ч 30 мин.

Решение. Пусть D и E – места первой и второй встреч мотоциклиста с пешеходом, v – скорость пешехода. Тогда из условий задачи имеем соотношения

$$ED = \frac{1}{2}v, \quad \frac{AD}{10v} = \frac{DB}{v}, \quad \frac{DB}{10v} + \frac{1}{4} + \frac{BE}{10v} = \frac{DE}{v} = \frac{1}{2}.$$

Из второго равенства имеем $AD = 10DB$, поэтому $AB = 11DB$. Из третьего равенства получаем $DB + BE = \frac{5}{2}v$, поэтому $2DB + DE = \frac{5}{2}v$. Так как $DE = \frac{1}{2}v$, из последнего равенства следует, что $DB = v$.

Пусть x – время прибытия пешехода в пункт C . Тогда

$$(x-15)v = DC = BC - BD = \frac{11}{2}BD - BD = \frac{9}{2}BD = \frac{9}{2}v,$$

поэтому $x - 15 = 9/2$. В результате получаем искомое время $x = 19$ ч 30 мин.

64. 10 ч 15 мин.

Решение. Пусть C и D – места первой и второй встреч велосипедиста с пешеходом, v – скорость пешехода. Так как расстояние от C до D пешеход прошел за один час, то численно $CD = v$. За это время велосипедист проехал расстояние, равное $CB + BD = v + 2DB$, и сделал 15-минутную остановку в пункте B . Следовательно,

$$\frac{CB + BD}{4v} + \frac{1}{4} = \frac{CD}{v} = 1,$$

откуда получаем $DB = v$. Далее, учитывая одновременное прибытие велосипедиста в пункт A и пешехода в пункт B , выводим соотношение

$$\frac{CB + BA}{4v} + \frac{1}{4} = \frac{CB}{v},$$

поэтому $AC + 2CB + v = 4CB$, $AC = 2CB - v = 2(CD + DB) - v = 4v - v = 3v$.

Если x – время отправления велосипедиста из пункта A , то $AC = 4v(11 - x)$, т.е. $3v = 4v(11 - x)$.

Таким образом, $11 - x = \frac{3}{4}$, т.е. $x = (11 - \frac{3}{4}) = 10$ ч 15 мин.

65. 10 ч, 1250 т.

Решение. При загрузке судна P скорость его составляет $v = v_0 - kP$, где k – коэффициент пропорциональности, $v_0 > 0$. Из условий задачи получаем

$$v_0 - 2000k = \frac{1}{3}(v_0 - 1000k),$$

поэтому $k = v_0/2500$, $v = v_0 \left(1 - \frac{P}{2500}\right)$. Следовательно, грузооборот судна равен $v_0 P \left(1 - \frac{P}{2500}\right)$. Последнее выражение принимает наибольшее значение при $P = 1250$ т.

Кроме того, если s – расстояние между портами, то

$$\frac{s}{v_0 \left(1 - \frac{2000}{2500}\right)} = 25,$$

т.е. $s = 5v_0$. При наибольшем грузообороте судно пройдет расстояние между портами за время, равное

$$\frac{s}{v} = \frac{5v_0}{v_0 \left(1 - \frac{1250}{2500}\right)}, \quad t = 10 \text{ ч.}$$

66. 96%.

Решение. При числе вагонов товарного поезда n его скорость $v = v_0 - kn$, где k – коэффициент пропорциональности, $v_0 > 0$. Из условия задачи получаем, что

$$v_0 - 60k = \frac{2}{3}(v_0 - 40k),$$

поэтому $k = \frac{v_0}{100}$, $v = v_0 \left(1 - \frac{n}{100}\right)$ – скорость состава из n вагонов. Следовательно, грузооборот товарного состава равен $v_0 n \left(1 - \frac{n}{100}\right)$. Последнее выражение принимает наибольшее значение при $n = 50$.

Пусть бригада, составляя товарные составы из 40 вагонов, выполняет план перевозок на $x\%$. Тогда

$$\frac{x}{100} = \frac{v_0 \cdot 40 \left(1 - \frac{40}{100}\right)}{v_0 \cdot 50 \left(1 - \frac{50}{100}\right)} = \frac{24}{25},$$

откуда получаем $x = \frac{24}{25} \cdot 100 = 96\%$.

67. 43 м; 5 руб. 30 коп. ; 4 руб. 50 коп.

Решение. Пусть l – длина каждого куска ткани, x и y – цена 1 м более дорогой и более дешевой ткани соответственно. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} l(x - y) = 34,4, \\ 5x - 3y = 13, \\ 4x + 2y = 30,2. \end{cases}$$

Однако из второго и третьего уравнений системы следует

$$\begin{cases} 10x - 6y = 26, \\ 12x + 6y = 90,6, \end{cases}$$

поэтому $22x = 116,6$, и, значит, $x = 116,6/22 = 5,3$ руб.

Далее, из последнего уравнения первой системы имеем $2y = 30,2 - 4x = 30,2 - 21,2 = 9$, поэтому $y = 4,5$ руб.

Наконец, из первого уравнения получаем $l(5,3 - 4,5) = 34,4$, откуда $0,8l = 34,4$, $l = 344/8 = 43$ м.

68. 41 м, 45 м.

Решение. Если l — длина куска более дорогой ткани, x и y — стоимость 1 м более дорогой и более дешевой ткани соответственно, то из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} lx + (l + 4)y = 496,4, \\ 5y - 4x = 0,4, \\ 4y + 5x = 52,8. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений, составленную из второго и третьего уравнений, получаем $x = 6,4$, $y = 5,2$. Подставив эти значения для x и y в первое уравнение, имеем $11,6l = 496,4 - 20,8 = 475,6$, поэтому $l = 41$.

Таким образом, $l = 41$ м, а длина куска более дешевой ткани равна 45 м.

69. $C : A = 2$.

Решение. Пусть $k = C : A$ — искомое отношение. Тогда имеем

$$x_1 = \frac{x(x+y)}{x^2 + 2xy + ky^2}, \quad y_1 = \frac{y(x+ky)}{x^2 + 2xy + ky^2},$$

поэтому

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x(x+y)}{y(x+ky)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} + k}.$$

Обозначим через x_2 , y_2 частоту встречаемости генов типа a , b соответственно во втором поколении. Из условия задачи

получаем соотношение

$$\frac{5}{12} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{\frac{x_1}{y_1} + 1}{\frac{x_1}{y_1} + k},$$

где

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1+1}{1+k} = \frac{2}{1+k}.$$

Следовательно,

$$\frac{5}{12} = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{\frac{2}{1+k} + 1}{\frac{2}{1+k} + k} = \frac{2(3+k)}{(1+k)(2+k+k^2)},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} 24(3+k) &= 5(2+3k+2k^2+k^3), \\ 5k^3+10k^2-9k-62 &= 0, \\ (k-2)(5k^2+20k+31) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $k = 2$. Других решений не существует, поскольку квадратное уравнение $5k^2 + 20k + 31 = 0$ не имеет корней в области вещественных чисел.

70. $4/7$, $3/7$.

Решение. Подставляя $k = 1/2$ в данные соотношения для x_1 и y_1 , получаем

$$x_1 = \frac{x(x+2y)}{x^2+4xy+y^2}, \quad y_1 = \frac{y(2x+y)}{x^2+4xy+y^2},$$

поэтому по условию задачи

$$\frac{40}{33} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x(x+2y)}{y(2x+y)} = \frac{z(z+2)}{2z+1},$$

где $z = x/y$. В результате для z имеем уравнение $40(2z+1) = 33(z+2)$, т.е. $33z^2 - 14z - 40 = 0$. Следовательно,

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 1320}}{33} = \frac{7 \pm \sqrt{1369}}{33} = \frac{7 \pm 37}{33},$$

$$z_1 = \frac{4}{3}, \quad z_2 = -\frac{10}{11},$$

при этом второе решение $z_2 = -10/11$ является посторонним.

Таким образом, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ и $x + y = 1$, откуда легко найти x и y : $x = 4/7$ и $y = 3/7$.

71. Катер должен двигаться со скоростью v .

Решение. Пусть s — расстояние от катера до судна в момент времени t . Тогда

$$\begin{aligned} s^2 &= (a - xt)^2 + (vt)^2 = (v^2 + x^2)t^2 - 2axt + a^2 = \\ &= (v^2 + x^2) \left(t - \frac{ax}{v^2 + x^2} \right)^2 + a^2 \left(1 - \frac{x^2}{v^2 + x^2} \right), \end{aligned}$$

где x — скорость катера. Ясно, что наименьшее значение s^2 составляет $a^2 \left(1 - \frac{x^2}{v^2 + x^2} \right)$ и достигается при $t = \frac{ax}{v^2 + x^2}$.

Осталось определить скорость x , при которой функция $f(x) = \frac{x}{v^2 + x^2}$ принимает наибольшее значение. Искомое значение $x = x_0$ характеризуется условием

$$\frac{x_0}{v^2 + x_0^2} \geq \frac{x}{v^2 + x^2}$$

при всех значениях x , т.е.

$$x_0 x^2 - (v^2 + x_0^2)x + x_0 v^2 \geq 0.$$

Это неравенство справедливо для всех x тогда и только тогда, когда дискриминант $(v^2 + x_0^2)^2 - 4x_0 v^2 = (v^2 - x_0^2)^2 \leq 0$, откуда $x_0 = v$.

$$72. v > \frac{2}{\sqrt{3}} v_a.$$

Решение. Если крокодил плывет в направлении l и одна из акул достигает его в некоторой точке C , то акуле в точку C лучше плыть по прямой. На рис. 1 точки K и A – начальное положение крокодила и акулы соответственно, отрезок AM перпендикулярен AK , BM параллелен AC . Справедливо следующее отношение подобия: $\frac{KC}{AC} = \frac{KM}{BM}$. Но $\frac{KM}{BM} < \frac{KM}{AM}$, так как $BM > AM$. Поэтому акуле из точки A выгоднее плыть в направлении AM , т.е. наилучшей стратегией для акулы является движение по прямой линии в направлении, перпендикулярном AK .

Далее, из рис. 1 ясно, что $\frac{AM}{KM} < \frac{AN}{KN}$. Следовательно, крокодилу выгодно, чтобы угол AKM был как можно больше. Вместе с тем, так как для крокодила при движении в направлении l опасность имеется как слева, так и справа, то ему выгодно выбрать направление своего движения так, чтобы $\angle AKM = 60^\circ$. Таким образом, если $\frac{AM}{v_a} > \frac{KM}{v}$, т.е. $\frac{v}{v_a} > \frac{KM}{AM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ при $\angle AKM = 60^\circ$, то крокодил сможет удрать на берег.

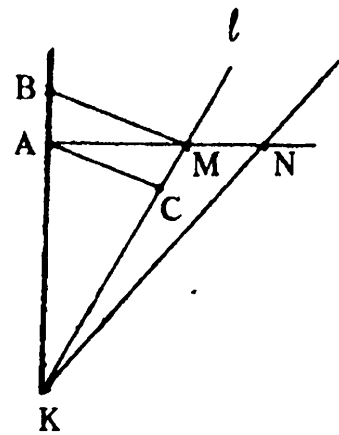


Рис. 1.

ГЛАВА 2. АЛГЕБРА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. {2}.

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$3 + x + 2\sqrt{(3 + x)(18 + x)} + 18 + x = 45,$$

откуда $\sqrt{(3 + x)(18 + x)} = 12 - x$. Еще раз возводя в квадрат, получаем уравнение

$$(3 + x)(18 + x) = 144 - 24x + x^2,$$

поэтому $54 + 21x + x^2 = 144 - 24x + x^2$ и $45x = 90$. Таким образом, $x = 2$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что $x = 2$ является решением первоначального уравнения.

2. {4}.

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$3 + x + 2\sqrt{(3 + x)(24 + x)} + 24 + x = 63,$$

поэтому $\sqrt{(3 + x)(24 + x)} = 18 - x$. Снова возводя в квадрат, имеем уравнение

$$(3 + x)(24 + x) = 324 - 36x + x^2,$$

откуда $72 + 27x + x^2 = 324 - 36x + x^2$ и $63x = 252$. Следовательно, $x = 4$. Легко проверить, что $x = 4$ является решением первоначального уравнения.

3. $\{\frac{1}{2}\}$.

Решение. После возведения в квадрат обеих частей уравнения имеем

$$20 - 20x + 2\sqrt{(7 - 10x)(13 - 10x)} = 36 - 36x,$$

откуда $\sqrt{(7-10x)(13-10x)} = 8-8x$. Если еще раз возвести в квадрат, то после очевидных преобразований получаем квадратное уравнение

$$4x^2 - 8x + 3 = 0,$$

поэтому $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4}$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Решение $x = \frac{3}{2}$ не входит в область допустимых значений первоначального уравнения. В то же время $x = \frac{1}{2}$ является решением этого уравнения, в чем легко убедиться путем проверки.

4. $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$10x + 1 + 2\sqrt{(10x + 1)(10x + 19)} + 10x + 19 = 36(x + 1),$$

откуда $\sqrt{(10x + 1)(10x + 19)} = 8x + 8$. Снова возводя в квадрат, получаем

$$(10x + 1)(10x + 19) = 64x^2 + 128x + 64,$$

что после преобразований дает квадратное уравнение $4x^2 + 8x - 5 = 0$. Следовательно, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$. Здесь второе решение не входит в область допустимых значений первоначального уравнения, а первое решение является также и решением исходного уравнения, в чем убеждаемся путем проверки.

5. $\left\{ \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \right\}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из всех x , для которых $2 + x - x^2 \geq 0$, т.е. $-1 \leq x \leq 2$.

Если обе части уравнения возвести в квадрат, то $2 + x - x^2 = 1 - 4x + 4x^2$, откуда $5x^2 - 5x - 1 = 0$. Следовательно,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{10} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10}.$$

Так как $-1 < \frac{5-3\sqrt{5}}{10} < \frac{5+3\sqrt{5}}{10} < 2$, оба решения входят в ОДЗ. В то же время для $x = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ имеем $1 - 2x = 1 - \left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{5}} < 0$, поэтому данное решение является посторонним. Наконец, для $x = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ получаем $1 - 2x = 1 - \left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}} > 0$, поэтому $x = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ является также решением первоначального уравнения.

6. $\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}.$

Решение. ОДЗ состоит из всех x , для которых $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, поэтому $x \leq 1$ или $x \geq 2$.

Считая, что $2x - 1 \geq 0$, возводим обе части уравнения в квадрат. Тогда получаем $x^2 - 3x + 2 = 4x^2 - 4x + 1$, откуда $3x^2 - x - 1 = 0$. Следовательно, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Поскольку $x = \frac{1-\sqrt{13}}{6} < \frac{1}{2}$, это решение квадратного уравнения является посторонним для первоначального уравнения. Далее, легко видеть, что $\frac{1}{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{6} < 1$, поэтому $x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ есть решение исходного уравнения.

7. $\{-3\}.$

Решение. Ясно, что ОДЗ состоит из всех x , для которых $x \geq 6$ или $x \leq \frac{7}{3}$. Кроме того, так как значения квадратного корня всегда неотрицательные, уравнение может иметь только неположительные решения.

Считая, что $x \leq 0$, запишем уравнение в виде

$$\sqrt{(6-x)(7-3x)} = -4x$$

и возведем обе части уравнения в квадрат. Тогда имеем $(6-x)(7-3x) = 16x^2$, поэтому $13x^2 + 25x - 42 = 0$.

Следовательно,

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 2184}}{26} = \frac{-25 \pm \sqrt{2809}}{26} = \frac{-25 \pm 53}{26},$$

$$x_1 = \frac{14}{13}, \quad x_2 = -3.$$

В результате получаем единственное решение первоначального уравнения $x = -3$.

8. $\{-2/5\}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из всех x , для которых $-4 \leq x \leq 6$. Кроме того, из уравнения видно, что $2 - x \geq 0$, т.е. $x \leq 2$.

Если обе части уравнения возвести в квадрат, то получим $4(4 - 4x + x^2) = 24 + 2x - x^2$, откуда $5x^2 - 18x - 8 = 0$.

Следовательно,

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{5} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{5} = \frac{9 \pm 11}{5},$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{2}{5}.$$

Здесь $x_1 = 4$ — постороннее решение. Наконец, $-4 < x_2 = -\frac{2}{5} < 2$, поэтому $x_2 = -\frac{2}{5}$ есть решение исходного уравнения.

9. $\{2 + \sqrt{2}\}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из всех x , для которых $2x - 1 \geq 0$, $x - \sqrt{2x - 1} \geq 0$, $x + \sqrt{2x - 1} \geq 0$. Тогда из первого неравенства получаем, что $x \geq \frac{1}{2}$. Если $x \geq \frac{1}{2}$, то третье неравенство выполняется очевидным образом. Наконец, записывая второе неравенство в виде $\sqrt{2x - 1} \leq x$ и возводя обе части неравенства в квадрат, имеем $2x - 1 \leq x^2$, т.е. $(x - 1)^2 \geq 0$. Следовательно, ОДЗ состоит из всех x , для которых $x \geq \frac{1}{2}$.

Если обе части первоначального уравнения возвести в квадрат, то получим

$$x - \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)} + x + \sqrt{2x - 1} = x^2,$$

откуда $1 + 2\sqrt{(x - 1)^2} = (x - 1)^2$, что удобно записать в виде $z^2 - 2z - 1 = 0$, где $z = |x - 1|$. В результате $z = 1 \pm \sqrt{2}$. Отметим, что $z = |x - 1| \geq 0$, поэтому имеется только одно решение $z = 1 + \sqrt{2}$.

Таким образом, $|x - 1| = 1 + \sqrt{2}$. Если $x \geq 1$, то $|x - 1| = x - 1$, поэтому $x - 1 = 1 + \sqrt{2}$ и $x = 2 + \sqrt{2}$. Если же $x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$, откуда $1 - x = 1 + \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$. Это решение не входит в ОДЗ исходного уравнения.

10. $\{4(2 + \sqrt{3})\}$.

Решение. ОДЗ состоит из всех x , для которых $x - 1 \geq 0$, $x + 2\sqrt{x - 1} \geq 0$, $x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0$, т.е. $x \geq 1$ и $x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0$. Но последнее неравенство можно записать в виде $2\sqrt{x - 1} \leq x$. Если теперь возвести обе части неравенства в квадрат, то получим $4(x - 1) \leq x^2$, откуда $(x - 2)^2 \geq 0$. Следовательно, ОДЗ состоит из всех x , для которых $x \geq 1$.

Возведем в квадрат обе части исходного уравнения:

$$x + 2\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x - 1)} + x - 2\sqrt{x - 1} = \frac{x^2}{4},$$

т.е. $2x + 2\sqrt{(x - 2)^2} = \frac{x^2}{4}$, $8x + 8|x - 2| = x^2$.

Если $x \geq 2$, то $|x - 2| = x - 2$, поэтому последнее уравнение сводится к квадратному уравнению $x^2 - 16x + 16 = 0$. В этом случае $x = 8 \pm \sqrt{64 - 16} = 8 \pm \sqrt{48} = 4(2 \pm \sqrt{3})$. Учитывая, что $4(2 - \sqrt{3}) < 2$, получаем только одно решение $x = 4(2 + \sqrt{3})$.

Если же $x < 2$, то $|x - 2| = 2 - x$, поэтому получаем уравнение $8x + 8(2 - x) = x^2$, т.е. $x^2 = 16$ и $x = \pm 4$. Здесь $x = 4$ — постороннее решение, так как рассматривается случай, когда $x < 2$. Наконец, $x = -4$ не входит в ОДЗ первоначального уравнения.

$$11. \left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Решение. Выполним замену переменной, полагая $z = 3x + 1/x$. Тогда $z^2 = 9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2}$, поэтому

$$18x^2 + \frac{2}{x^2} = 2 \left(9x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = 2z^2 - 12.$$

В результате получаем уравнение $2z^2 - 12 = 16 - z$ или $2z^2 + z - 28 = 0$, откуда

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{-1 \pm 15}{4}, \quad z = \frac{7}{2} \quad \text{или} \quad z = -4.$$

Если $z = \frac{7}{2}$, то $3x + \frac{1}{x} = \frac{7}{2}$, и, следовательно, $6x^2 - 7x + 2 = 0$. Если же $z = -4$, то $3x + \frac{1}{x} = -4$, поэтому $3x^2 + 4x + 1 = 0$.

Первое квадратное уравнение имеет решения

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12}, \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2},$$

а второе —

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}, \quad x_4 = -1.$$

$$12. \left\{-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Решение. Рассмотрим новую неизвестную $z = 2x - \frac{1}{x}$. Тогда $z^2 = 4x^2 - 4 + 1/x^2$, поэтому правая часть уравнения $4x^2 + 1/x^2 = z^2 + 4$, а левая $2x + 6 - 1/x = z + 6$. Следовательно, для неизвестной z имеем уравнение $z^2 + 4 = z + 6$, т.е. $z^2 - z - 2 = 0$. В результате получаем два решения $z = 2$ и $z = -1$.

Если $z = 2x - \frac{1}{x} = 2$, то для неизвестной x получаем квадратное уравнение $2x^2 - 2x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$.

Если же $z = 2x - \frac{1}{x} = -1$, то $2x^2 + x - 1 = 0$, поэтому $x = -1$ и $x = 1/2$.

13. $a = 2(2 + \sqrt{5})$.

Решение. Если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения, то $x_1 + x_2 = a/2$ и $x_1 x_2 = 1/2$, поэтому $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} - 1$. Тогда из условия задачи получаем уравнение для определения искомого значения a : $\frac{a^2}{4} - 1 = 2a$, т.е. $a^2 - 8a - 4 = 0$. Следовательно, $a = 2(2 \pm \sqrt{5})$. Но $2a = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$, поэтому $a = 2(2 - \sqrt{5})$ является посторонним решением. Отметим также, что квадратное уравнение в условии задачи имеет действительные решения только при $|a| \geq 2\sqrt{2}$. Этому последнему условию удовлетворяет $a = 2(2 + \sqrt{5})$.

14. $a = \pm 6$.

Решение. Если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $3x^2 + ax + 2 = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{a}{3}$ и $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$. Так как $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2)$, то из условия задачи получаем уравнение для определения неизвестной a :

$$\left(-\frac{a}{3}\right) \left(\frac{a^2}{9} - 2\right) = 2 \left(-\frac{a}{3}\right),$$

т.е. $\left(-\frac{a}{3}\right) \left(\frac{a^2}{9} - 4\right) = 0$. Следовательно, $a = 0$ или $a = \pm 6$.

Отметим, что $a = 0$ — постороннее решение, так как в этом случае данное квадратное уравнение $3x^2 + 2 = 0$ не имеет действительных решений. Если же $a = \pm 6$, то получаем уравнение $3x^2 \pm 6x + 2 = 0$, для которого дискриминант квадратного трехчлена $D = 36 - 24 = 12 > 0$, поэтому при $a = \pm 6$ уравнение разрешимо в области действительных чисел.

15. $a \in [1, 2]$.

Решение. Корни уравнения

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - (2a^2 - 4a + 3)} = a \pm \sqrt{-a^2 + 4a - 3}.$$

Условие существования корней: $-a^2 + 4a - 3 \geq 0$, т.е. $a^2 - 4a + 3 \leq 0$, откуда $1 \leq a \leq 3$.

Пусть $x_1 = a - \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$, $x_2 = a + \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$.

Рассмотрим неравенство $1 \leq x_2$, т.е.

$$1 \leq a + \sqrt{-a^2 + 4a - 3}.$$

Очевидно, что оно справедливо для всех $a \in [1, 3]$, так как уже одно слагаемое $a \geq 1$.

Неравенство $x_1 \leq 1$ имеет вид $a - \sqrt{-a^2 + 4a - 3} \leq 1$. Запишем его иначе: $a - 1 \leq \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$. При $1 \leq a \leq 3$ это неравенство равносильно неравенству $a^2 - 2a + 1 \leq -a^2 + 4a - 3$, откуда получаем $a^2 - 3a + 2 \leq 0$. Здесь корни квадратного трехчлена $a = 2$ или $a = 1$. Следовательно, $x_1 \leq 1$ только при $1 \leq a \leq 2$.

16. $b \in [2, 4]$.

Решение. Корни уравнения $x_1 = -b - \sqrt{4b - b^2}$, $x_2 = -b + \sqrt{4b - b^2}$. Условие существования действительных корней: $4b - b^2 \geq 0$, т.е. $0 \leq b \leq 4$.

Рассмотрим неравенство $x_1 \leq -4$, которое запишем в виде $4 - b \leq \sqrt{4b - b^2}$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем неравенство $16 - 8b + b^2 \leq 4b - b^2$, откуда $b^2 - 6b + 8 \leq 0$, и, следовательно, $2 \leq b \leq 4$. Отметим также, что $-4 \leq x_2$, т.е. неравенство $(4 - b) + \sqrt{4b - b^2} \geq 0$ справедливо для всех $b \in [0, 4]$.

17. $x_1 = a - \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$, $x_2 = a + \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$ ($1 \leq a \leq 3$).

Если $1 \leq a \leq 2$, то $x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 4$; если $2 < a \leq 3$, то $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 4$.

Решение. Корни уравнения

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - (2a^2 - 4a + 3)} = a \pm \sqrt{-a^2 + 4a - 3}.$$

Условие существования корней: $-a^2 + 4a - 3 \geq 0$, откуда $1 \leq a \leq 3$.

Рассмотрим наибольший корень $x_2 = a + \sqrt{-a^2 + 4a - 3}$. Очевидно, что $x_2 \geq 1$, так как $1 \leq a \leq 3$. Неравенство $x_2 \leq 4$ запишем в виде $\sqrt{-a^2 + 4a - 3} \leq 4 - a$. Возводя обе части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство $-a^2 + 4a - 3 \leq 16 - 8a + a^2$, поэтому $2a^2 - 12a + 19 \geq 0$. Однако последнее неравенство справедливо, так как $36 - 38 = -2 < 0$. Следовательно, при $1 \leq a \leq 3$ выполняется неравенство $x_2 \leq 4$.

Теперь исследуем наименьший корень

$$x_1 = a - \sqrt{-a^2 + 4a - 3}.$$

Неравенство $x_1 \leq 1$ запишем в виде

$$\sqrt{-a^2 + 4a - 3} \geq a - 1.$$

Здесь $a \geq 1$, а после возведения обеих частей неравенства в квадрат найдем $-a^2 + 4a - 3 \geq a^2 - 2a + 1$, поэтому $a^2 - 3a + 2 \leq 0$ и $1 \leq a \leq 2$.

$$18. x_1 = -b - \sqrt{4b - b^2}, x_2 = -b + \sqrt{4b - b^2} \quad (0 \leq b \leq 4).$$

Если $2 \leq b \leq 4$, то $0 \geq x_2 \geq -4 \geq x_1$; если $0 \leq b < 2$, то $x_2 \geq 0 \geq x_1 \geq -4$.

Решение. Корни уравнения $x_1 = -b - \sqrt{4b - b^2}$, $x_2 = -b + \sqrt{4b - b^2}$. Условие существования корней: $4b - b^2 \geq 0$, т.е. $0 \leq b \leq 4$.

Рассмотрим неравенство $x_1 \leq 0$, т.е. $-b \leq \sqrt{4b - b^2}$. Это неравенство справедливо для всех $b \in [0, 4]$. Кроме того, неравенство $x_1 \leq -4$ можно записать в виде $4 - b \leq \sqrt{4b - b^2}$, при этом после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем, что $16 - 8b + b^2 \leq 4b - b^2$, т.е. $b^2 - 6b + 8 \leq 0$. Следовательно, $2 \leq b \leq 4$.

Далее, неравенство $x_2 \geq -4$ справедливо очевидным образом для всех $b \in [0, 4]$, так как для таких b имеем $-b \geq -4$.

Наконец, рассмотрим неравенство $x_2 \leq 0$, т.е. $\sqrt{4b - b^2} \leq b$. Возводя обе части неравенства в квадрат, получаем $4b - b^2 \leq b^2$, т.е. $2b^2 - 4b = 2b(b - 2) \geq 0$, откуда $b \geq 2$ или $b \leq 0$.

$$19. b = -2, \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Решение. Если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + bx - 1 = 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 x_2 = -1$. Аналогично из второго уравнения получаем $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = b^2$ и $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -b$. Подставляя $x_1 + x_2 = -b$ и $x_1 x_2 = -1$, находим соотношения $-b + 2 = b^2$ и $-1 - b + 1 = -b$. Здесь второе равенство выполняется для любого b , а первое приводит к квадратному уравнению $b^2 + b - 2 = 0$, откуда $b = 1$ или $b = -2$.

Таким образом, $b = -2$, и первое квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 2x - 1 = 0$, поэтому $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

$$20. b = 2, \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Решение. Для корней квадратного уравнения $x^2 + bx - 2 = 0$ получаем соотношения $x_1 + x_2 = -b$ и $x_1 x_2 = -2$, как утверждает теорема Виета. Аналогично $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = -b^2$ и $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = b - 1$. Последние соотношения запишем в виде

$$(x_1 + x_2) - 2 = -b^2, \quad x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = b - 1.$$

Подставив значения для $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$, получаем $-b - 2 = -b^2$ и $-2 + b + 1 = b - 1$. Здесь второе равенство выполняется очевидным образом для любого b , а первое сводится к квадратному уравнению $b^2 - b - 2 = 0$, поэтому $b = 2$ или $b = -1$. Так как по условию задачи необходимо рассматривать только положительные значения для b , имеем $b = 2$.

Таким образом, $b = 2$. Но тогда первое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + 2x - 2 = 0$, откуда $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

21. $a = 4$.

Решение. Ясно, что левая часть уравнения определена только для $x > 0$, $x \neq 1$, а также $a > 0$, $a \neq 1$.

Так как $2 \log_a |x - 1| = \log_a |x - 1|^2 = \log_a (x - 1)^2$, получаем уравнение $\log_a \frac{(x-1)^2}{x} = 1$, откуда $(x - 1)^2 = ax$, т.е. $x^2 - (2 + a)x + 1 = 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена $D = (2 + a)^2 - 4 = a^2 + 4a > 0$, если $a > 0$. Следовательно, уравнение имеет действительные решения.

По теореме Виета для корней квадратного уравнения x_1, x_2 имеем соотношения $x_1 + x_2 = 2 + a$, $x_1 x_2 = 1$, при этом $x_1 \neq x_2$, так как $D > 0$. Следовательно, оба решения положительные и отличны от 1, т.е. x_1 и x_2 принадлежат ОДЗ первоначального уравнения.

Наконец, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2 + a)^2 - 2 = a^2 + 4a + 2 = 34$, откуда получаем $a^2 + 4a - 32 = 0$, $a = -2 \pm \sqrt{4 + 32} = -2 \pm 6 = 4$ или -8 . Здесь решение $a = -8$ постороннее, так как $a > 0$, $a \neq 1$.

22. $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}$.

Решение. Очевидно, что левая часть уравнения определена только для $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 2a$.

Если $x > 2a$, то $|x - 2a| = x - 2a$ и уравнение можно преобразовать в уравнение вида $\log_a x(x - 2a) = 2$, откуда получаем $x(x - 2a) = a^2$, т.е. $x^2 - 2ax - a^2 = 0$. Следовательно, $x = a \pm \sqrt{a^2 + a^2} = a(1 \pm \sqrt{2})$, при этом $x = a(1 - \sqrt{2})$ является посторонним решением.

Если же $x < 2a$, то $|x - 2a| = 2a - x$. В этом случае получаем уравнение $x(2a - x) = a^2$, т.е. $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, $(x - a)^2 = 0$, поэтому $x = a$.

Таким образом, имеем два решения $x_1 = a(1 + \sqrt{2})$ и $x_2 = a$. Но тогда по условию задачи $x_1^2 + x_2^2 = ((1 + \sqrt{2})^2 + 1)a^2 = (4 + 2\sqrt{2})a^2 = 4$, поэтому $a^2 = \frac{4}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$. Следовательно, $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}$.

23. Если $b \geq a$, то $x = a$; если $b < a$, то $x = b$.

Решение. После возведения в квадрат обеих частей уравнения имеем уравнение

$$5a+5b-10x+2\sqrt{(4a+b-5x)(4b+a-5x)}=9a+9b-18x,$$

поэтому $\sqrt{(4a+b-5x)(4b+a-5x)}=2a+2b-4x$.

Еще раз возводя в квадрат, после преобразований получаем квадратное уравнение $9(x-a)(x-b)=0$, откуда $x=a$ или $x=b$.

Следует отметить, что здесь возможно появление посторонних решений, поэтому в заключение выполним проверку.

Подставляя в начальное уравнение значение $x=a$, после преобразований имеем $|b-a|=b-a$, что возможно только при $b \geq a$. Аналогично $x=b$ является решением начального уравнения только при $a \geq b$.

24. Если $-16 \leq a \leq 8$, то $x = \pm \frac{a}{4}$; если $a < -16$ или $a > 8$, то уравнение не имеет решений.

Решение. После возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем

$$2x^2+a+20+2\sqrt{(x^2-a+4)(x^2+2a+16)}=36,$$

поэтому $16-a-2x^2=2\sqrt{(x^2-a+4)(x^2+2a+16)}$.

Еще раз возводя в квадрат, имеем

$$(16-a-2x^2)^2=4(x^2-a+4)(x^2+2a+16),$$

откуда в результате преобразований получаем квадратное уравнение $9a^2-144x^2=0$, т.е. $x = \pm \frac{a}{4}$.

В заключение отметим, что при сделанных преобразованиях возможно появление посторонних решений начального уравнения. Следовательно, необходимо дополнительное исследование. Например, чтобы выяснить, какие из решений являются посторонними, достаточно сделать проверку. Подставляя $x = \pm \frac{a}{4}$ в уравнение, получаем

$$\sqrt{\frac{(a-8)^2}{16}} + \sqrt{\frac{(a+16)^2}{16}} = 6,$$

поэтому $|a - 8| + |a + 16| = 24$. Если $-16 \leq a \leq 8$, то левая часть последнего соотношения $|a - 8| + |a + 16| = -a + 8 + a + 16$, т.е. она совпадает с правой частью. Если же $a < -16$, то

$$|a - 8| + |a + 16| = -a + 8 - a - 16 = -2a - 8 > 32 - 8 = 24.$$

Наконец, если $a > 8$, то $|a - 8| + |a + 16| = 2a + 8 > 24$.

25. 1) Если $a < -\frac{1}{16}$, то $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16a}}{4}$,

2) если $-\frac{1}{16} \leq a \leq \frac{1}{16}$, то $x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16a}}{4}$ и $x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-16a}}{4}$,

3) если $a > \frac{1}{16}$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16a}}{4}$.

Решение. Разрешим уравнение относительно a . Тогда получим

$$a = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(x^2 - 4x^4)}}{4} = \frac{x \pm 2x^2}{2},$$

поэтому $\pm 2x^2 + x - 2a = 0$.

Если $2x^2 + x - 2a = 0$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16a}}{4}$, причем эти решения существуют в области действительных чисел при $1 + 16a \geq 0$, т.е. при $a \geq -\frac{1}{16}$.

Если $-2x^2 + x - 2a = 0$, то $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16a}}{4}$ ($a \leq \frac{1}{16}$).

26. 1) Если $a < -\frac{1}{12}$, то $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{6}$,

2) если $-\frac{1}{12} \leq a \leq \frac{1}{12}$, то $x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{6}$ и $x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12a}}{6}$,

3) если $a > \frac{1}{12}$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12a}}{6}$.

Решение. Так как требуется найти все пары (x, a) , удовлетворяющие уравнению, разрешим уравнение относительно a . Тогда имеем

$$a = x \pm \sqrt{x^2 - (x^2 - 9x^4)} = x \pm 3x^2,$$

поэтому $\pm 3x^2 + x - a = 0$.

Если $3x^2 + x - a = 0$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12a}}{6}$, причем эти решения существуют в области действительных чисел при $1 + 12a \geq 0$, т.е. при $a \geq -\frac{1}{12}$.

Если $-3x^2 + x - a = 0$, то $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{6}$ ($a \leq \frac{1}{12}$).

27. 1) Если $a < b + \frac{1}{4}$, то уравнение не имеет решений,

2) если $a = b + \frac{1}{4}$, то $x = -b - \frac{1}{8}$,

3) если $a > b + \frac{1}{4}$, то $x_{1,2} = -b + \left(\frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6} \right)^3$.

Решение. Данное уравнение запишем в виде $\sqrt[3]{x+a} = 1 + \sqrt[3]{x+b}$ и возведем в куб обе его части. Тогда получим равносильное уравнение

$$x + a = 1 + 3\sqrt[3]{x+b} + 3\sqrt[3]{(x+b)^2} + x + b.$$

Рассмотрим новую неизвестную $z = \sqrt[3]{x+b}$. Для z имеем квадратное уравнение $3z^2 + 3z + (1+b-a) = 0$. Следовательно, $z = \frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6}$, откуда нетрудно найти x :

$$x = -b + \left(\frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6} \right)^3.$$

Условие разрешимости квадратного уравнения (и, следовательно, условие разрешимости первоначального уравнения) $12(a-b)-3 \geq 0$, т.е. $a \geq b + \frac{1}{4}$.

28. 1) Если $b > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-3b^2 \pm \sqrt{3b(4a-b^3)}}{6b}$ для $a > \frac{b^3}{4}$,
 $x = -\frac{b}{2}$ для $a = \frac{b^3}{4}$, а при $a < \frac{b^3}{4}$ уравнение не имеет решений,

2) если $b < 0$, то $x_{1,2} = \frac{-3b^2 \pm \sqrt{3b(4a-b^3)}}{6b}$ для $a < \frac{b^3}{4}$,
 $x = -\frac{b}{2}$ для $a = \frac{b^3}{4}$, а при $a > \frac{b^3}{4}$ уравнение не имеет решений,

3) если $b = 0$, то для $a = 0$ любое число есть решение, а при $a \neq 0$ уравнение не имеет решений.

Решение. Данное уравнение запишем в виде $\sqrt[3]{a+x^3} = b+x$ и возведем в куб обе части уравнения. Тогда получим равносильное уравнение $a+x^3 = b^3+3b^2x+3bx^2+x^3$, которое представимо как уравнение $3bx^2+3b^2x+(b^3-a)=0$.

Если $b = 0$, то получаем соотношение $-a = 0$, поэтому при $a \neq 0$ уравнение не имеет решений, а при $a = 0$ каждое число x является решением начального уравнения.

Предположим, что $b \neq 0$. Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-3b^2 \pm \sqrt{9b^4 - 12b(b^3 - a)}}{6b} = \frac{-3b^2 \pm \sqrt{3b(4a - b^3)}}{6b},$$

при этом условие разрешимости в области действительных чисел состоит в выполнении неравенства $3b(4a - b^3) \geq 0$.

29. $x_{1,2} = \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2+10a+1}}{2}.$

1) Если $a \leq -5 - 2\sqrt{6}$, то уравнение имеет два решения x_1 и x_2 ,

2) если $-5 + 2\sqrt{6} \leq a < 0$, то уравнение не имеет решений,

3) если $a \geq 0$, то уравнение имеет одно решение x_1 .

Решение. Область допустимых значений: $x \geq a$, $x \geq -a$, $x > -2$ или $x \geq a$, $x \leq -a$, $x < -2$, т.е. $x \geq |a|$ или $a \leq x \leq -a$, $x < -2$ (последнее при $a < -2$).

После возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем $\frac{x+a}{x+2} = x - a$, поэтому $x + a = (x + 2)(x - a)$, откуда получаем квадратное уравнение $x^2 + (1 - a)x - 3a = 0$. Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}.$$

Условие разрешимости $D = a^2 + 10a + 1 \geq 0$, т.е. $a \leq -5 - 2\sqrt{6}$ или $a \geq -5 + 2\sqrt{6}$.

Рассмотрим два случая.

1) $a \leq -5 - 2\sqrt{6}$. Неравенство $x_1 = \frac{a-1+\sqrt{a^2+10a+1}}{2} \leq -a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 10a + 1} \leq -3a + 1$, т.е. $a^2 + 10a + 1 \leq 9a^2 - 6a + 1$ и $8a(a - 2) \geq 0$. Но последнее неравенство справедливо для рассматриваемых a . Следовательно, $x_1 \leq -a$. Далее, $x_1 \geq a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 10a + 1} \geq a + 1$, которое справедливо, так как в этом случае $a + 1 < 0$. Таким образом, $a \leq x_1 \leq -a$. Кроме того, $x_1 < -2$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 10a + 1} < -3 - a$. Но тогда после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $a^2 + 10a + 1 < 9 + 6a + a^2$, т.е. $a < 2$, что справедливо при $a \leq -5 - 2\sqrt{6}$. В результате доказано, что x_1 принадлежит ОДЗ.

Теперь докажем, что x_2 также содержится в ОДЗ. Действительно, неравенство $x_2 \leq -a$ равносильно неравенству $-\sqrt{a^2 + 10a + 1} \leq -3a + 1$, которое справедливо, так как его правая часть $-3a + 1 > 0$. Кроме того, $x_2 \geq a$ равносильно $\sqrt{a^2 + 10a + 1} \leq -a - 1$. Возводя в квадрат обе части неравенства, получаем $a^2 + 10a + 1 \leq a^2 + 2a + 1$, т.е. $8a \leq 0$. Но в рассматриваемом случае последнее справедливо. Наконец, очевидно, что $x_2 < -2$.

Таким образом, в этом случае x_1 и x_2 лежат в ОДЗ и поэтому являются решениями исходного уравнения.

2) $a \geq -5 + 2\sqrt{6}$. Предположим сначала, что $-5 + 2\sqrt{6} \leq a < 0$. Как и ранее, доказывается, что $x_{1,2} < -a = |a|$. В то же время из условия $a \geq -5 + 2\sqrt{6}$ следует, что $a > -2$, поэтому x_1 и x_2 не содержатся в ОДЗ.

Пусть $a \geq 0$. Тогда $x_1 \geq |a| = a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 10a + 1} \geq a + 1$, т.е. $a^2 + 10a + 1 \geq a^2 + 2a + 1$, откуда $8a \geq 0$, что справедливо. Следовательно, x_1 содержится в ОДЗ. Наконец, $x_2 \geq a$ означает, что $-\sqrt{a^2 + 10a + 1} \geq a + 1$. Так как $a + 1 > 0$, а левая часть отрицательная, неравенство $x_2 \geq a$ не выполняется, поэтому x_2 не принадлежит области допустимых значений.

$$30. x_{1,2} = \frac{1+a \pm \sqrt{a^2+30a+1}}{2}.$$

1) Если $a < -15 + 4\sqrt{14}$, то уравнение не имеет решений,

2) если $-15 + 4\sqrt{14} \leq a \leq 0$, то уравнение имеет два решения x_1 и x_2 ,

3) если $0 < a < 3$, то уравнение имеет одно решение x_1 ,

4) если $a \geq 3$, то уравнение имеет два решения x_1 и x_2 .

Решение. ОДЗ состоит из всех x , для которых $x \geq -a$, $x \geq a$, $x \geq -3$ или $x \geq -a$, $x \leq a$, $x \leq -3$, т.е. $x \geq |a|$ или $-a \leq x \leq a$, $x \leq -3$.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения имеем $4(x+a) = (x-a)(x+3)$, поэтому $x^2 - (1+a)x - 7a = 0$. Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{1+a \pm \sqrt{a^2+30a+1}}{2}.$$

Условие разрешимости квадратного уравнения $D = a^2 + 30a + 1 \geq 0$, т.е. $a \leq -15 - 4\sqrt{14}$ или $a \geq -15 + 4\sqrt{14}$.

Рассмотрим два случая.

1) $a \leq -15 - 4\sqrt{14}$. Условие $x_1 \geq |a| = -a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 30a + 1} \geq -1 - 3a$, откуда после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $a^2 + 30a + 1 \geq 1 + 6a + 9a^2$, поэтому $8a^2 - 24a \leq 0$. Следовательно, $0 \leq a \leq 3$. В результате получаем, что в этом

случае x_1 не лежит в ОДЗ. Далее, $x_2 \geq |a|$ равносильно неравенству $-1 - 3a \leq -\sqrt{a^2 + 30a + 1}$, которое не выполняется при рассматриваемых a . Таким образом, при $a \leq -15 - 4\sqrt{14}$ уравнение не имеет решений.

2) $a \geq -15 + 4\sqrt{14}$. Предположим сначала, что $-15 + 4\sqrt{14} \leq a \leq 0$. Тогда $-1 - 3a < 0$, поэтому $x_1 \geq |a| = -a$, т.е. x_1 принадлежит ОДЗ. Далее, неравенство $x_2 \geq |a|$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 30a + 1} \leq 1 + 3a$, которое верно, если $a \leq 0$ или $a \geq 3$. Следовательно, x_2 также содержится в ОДЗ. Пусть теперь $0 < a < 3$. Очевидно, что $x_1 > 1 + a > a$, поэтому x_1 лежит в ОДЗ. Отметим, что x_1 содержится в ОДЗ и при $a \geq 3$. Кроме того, $x_2 \geq a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 30a + 1} \leq 1 - a$, которое не выполняется при $a > 1$. Если же $0 < a \leq 1$, то это неравенство после возведения в квадрат дает $a^2 + 30a + 1 \leq 1 - 2a + a^2$, т.е. неравенство $32a \leq 0$, которое также не выполняется. Наконец, пусть $a \geq 3$. Тогда x_2 принадлежит ОДЗ, так как $-a \leq x_2 \leq -3$. Действительно, неравенство $x_2 \geq -a$ доказывается так же, как и ранее, а $x_2 \leq -3$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2 + 30a + 1} \geq a + 7$, откуда получаем $16a \geq 48$, что справедливо при $a \geq 3$.

31. {1}.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых $x > -1$. Так как

$$\log_{\sqrt{x+3}} 3 = \frac{1}{\log_3 \sqrt{x+3}} = \frac{2}{\log_3(x+3)},$$

уравнение можно записать в виде

$$\frac{2 \log_3(1+x)}{\log_3(x+3)} = 1,$$

поэтому $\log_3(1+x)^2 = \log_3(x+3)$, $(1+x)^2 = x+3$ и $x^2 + x - 2 = 0$.

Таким образом, $x = 1$ или $x = -2$. Решение $x = -2$ является посторонним, так как оно не принадлежит ОДЗ исходного уравнения.

32. {6}.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых $x > 2$. Так как

$$\log_{\sqrt{x+10}} 5 = \frac{1}{\log_5 \sqrt{x+10}} = \frac{2}{\log_5 (x+10)},$$

уравнение можно записать в виде

$$\frac{2 \log_5 (x-2)}{\log_5 (x+10)} = 1,$$

поэтому $\log_5 (x-2)^2 = \log_5 (x+10)$, $(x-2)^2 = x+10$ и $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Следовательно, $x = -1$ или $x = 6$. Решение $x = -1$ является посторонним, так как оно не принадлежит ОДЗ исходного уравнения.

33. {-2/3}.

Решение. Так как $1 - 2x - 3x^2 = (1 - 3x)(1 + x)$, правую часть уравнения можно преобразовать в выражение вида

$$\begin{aligned} -1 + \log_{\sqrt{1-3x}}(1 - 2x - 3x^2) &= 1 + 2 \log_{(1-3x)}(x+1) = \\ &= 1 + \frac{2}{\log_{(x+1)}(1-3x)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим новую переменную $z = \log_{(x+1)}(1-3x)$. Тогда получим уравнение $z = 1 + 2/z$, поэтому $z^2 - z - 2 = 0$. Следовательно, $z = -1$ или $z = 2$.

Если $z = \log_{(x+1)}(1-3x) = -1$, то $\frac{1}{x+1} = 1 - 3x$, $1 = (1 - 3x)(x+1)$, поэтому $3x^2 + 2x = 0$. В результате находим, что $x = 0$ или $x = -\frac{2}{3}$. Очевидно, что корень $x = 0$

не входит в ОДЗ начального уравнения, а корень $x = -\frac{2}{3}$ является решением, в чем можно убедиться путем проверки.

Если $z = \log_{(x+1)}(1 - 3x) = 2$, то $(x + 1)^2 = 1 - 3x$, откуда $x^2 + 5x = 0$. Следовательно, $x = 0$ или $x = -5$. Оба корня не входят в ОДЗ начального уравнения.

34. $\{5/3\}$.

Решение. Так как $8x - 3x^2 - 4 = (2 - x)(3x - 2)$, для правой части уравнения получаем

$$\begin{aligned} -2 + \log_{(2-x)}(2 - x)(3x - 2) &= -2 + 1 + \log_{(2-x)}(3x - 2) = \\ &= -1 + \log_{(2-x)}(3x - 2), \end{aligned}$$

а для левой –

$$\log_{\sqrt{3x-2}}(2 - x) = \frac{1}{\log_{(2-x)} \sqrt{3x - 2}} = \frac{2}{\log_{(2-x)}(3x - 2)}.$$

Следовательно, для новой неизвестной $z = \log_{(2-x)}(3x - 2)$ имеем уравнение $\frac{2}{z} = -1 + z$, откуда $z^2 - z - 2 = 0$ и $z = \frac{1 \pm 3}{2}$, т.е. $z = 2$ или $z = -1$.

Если $z = \log_{(2-x)}(3x - 2) = 2$, то $3x - 2 = (2 - x)^2$, что дает квадратное уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$. Следовательно, $x = 1$ или $x = 6$.

Если $z = \log_{(2-x)}(3x - 2) = -1$, то $3x - 2 = \frac{1}{2-x}$, поэтому $3x^2 - 8x + 5 = 0$ и $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{3} = \frac{4 \pm 1}{3}$, т.е. $x = \frac{5}{3}$ или $x = 1$.

Здесь решения $x = 1$ и $x = 6$ являются посторонними, так как при $x = 1$ основание логарифма $2 - x = 1$, а при $x = 6$ то же основание отрицательное. Наконец, легко убедиться (например, путем проверки), что $x = \frac{5}{3}$ является решением начального уравнения.

35. $\{\frac{5}{2}\}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из тех x , для которых $2x - 3 > 0$, $2x - 3 \neq 1$, $3 - x > 0$, $3 - x \neq 1$,

$9x - 2x^2 - 9 = (2x - 3)(3 - x) > 0$, поэтому $\frac{3}{2} < x < 2$ или $2 < x < 3$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$2 + \log_{\sqrt{2x-3}}(3-x) = \log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3) + \\ + \log_{\sqrt{2x-3}}(3-x) = \log_{\sqrt{2x-3}}(9x - 2x^2 - 9).$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(9x - 2x^2 - 9) = \log_{(3-x)}(9x - 2x^2 - 9),$$

поэтому $\sqrt{2x-3} = 3-x$ или $9x - 2x^2 - 9 = 1$.

Если $\sqrt{2x-3} = 3-x$, то $2x-3 = (3-x)^2$, поэтому $x^2 - 8x + 12 = 0$ и $x = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$, т.е. $x = 6$ или $x = 2$. При этом оба корня являются посторонними для начального уравнения.

Если $9x - 2x^2 - 9 = 1$, то $2x^2 - 9x + 10 = 0$ и $x = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \frac{9 \pm 1}{4}$, т.е. $x = \frac{5}{2}$ или $x = 2$. Однако $x = 2$ не входит в ОДЗ начального уравнения.

36. $\{4\}$.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых $2+x > 0$, $2+x \neq 1$, $8+7x > 0$, $8+7x \neq 1$, $7x^2 + 22x + 16 > 0$, откуда получаем $x > -2$, $x \neq -1$, $x > -\frac{8}{7}$, $(7x+8)(x+2) > 0$. Следовательно, $-\frac{8}{7} < x < -1$ или $x > -1$.

Преобразуем правую часть уравнения:

$$2 + \log_{\sqrt{8+7x}}(2+x) = \log_{\sqrt{8+7x}}(8+7x) + \\ + \log_{\sqrt{8+7x}}(2+x) = \log_{\sqrt{8+7x}}(7x^2 + 22x + 16).$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\log_{(2+x)}(7x^2 + 22x + 16) = \log_{\sqrt{8+7x}}(7x^2 + 22x + 16),$$

откуда $2+x = \sqrt{8+7x}$ или $7x^2 + 22x + 16 = 1$.

Если $2 + x = \sqrt{8 + 7x}$, то $(2 + x)^2 = 8 + 7x$, откуда $x^2 - 3x - 4 = 0$ и $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, т.е. $x = 4$ или $x = -1$. При этом $x = -1$ — постороннее решение.

Если $7x^2 + 22x + 16 = 1$, то $7x^2 + 22x + 15 = 0$, поэтому $x = \frac{-11 \pm \sqrt{121-105}}{7} = \frac{-11 \pm \sqrt{16}}{7} = \frac{-11 \pm 4}{7}$, т.е. $x = -1$ или $x = -\frac{15}{7}$. Оба корня являются посторонними, так как они не принадлежат ОДЗ первоначального уравнения.

37. {5}.

Решение. Очевидно, что $x - 2 > 0$, $x - 2 \neq 1$, поэтому $x > 2$, $x \neq 3$. Кроме того, $4x - 11 > 0$, $4x - 11 \neq 1$, т.е. $x > 11/4$, $x \neq 3$. Оба ограничения на ОДЗ дают $x > 11/4$, $x \neq 3$. Отметим также, что $4x^2 - 19x + 22 = (4x - 11)(x - 2) > 0$, если $x > \frac{11}{4}$, $x \neq 3$.

Преобразуем обе части уравнения:

$$1 + \log_{(x-2)}(4x - 11) = \log_{(x-2)}(x - 2)(4x - 11) = \\ = \log_{(x-2)}(4x^2 - 19x + 22),$$

$$2 \log_{(4x-11)}(4x^2 - 19x + 22) = \log_{\sqrt{4x-11}}(4x^2 - 19x + 22).$$

Следовательно,

$$\log_{(x-2)}(4x^2 - 19x + 22) = \log_{\sqrt{4x-11}}(4x^2 - 19x + 22).$$

Здесь равенство выполняется, например, при $4x^2 - 19x + 22 = 1$, т.е. $4x^2 - 19x + 21 = 0$, поэтому $x = \frac{7}{4}$ или $x = 3$, причем оба корня не входят в ОДЗ начального уравнения.

Если $4x^2 - 19x + 22 \neq 1$, то основания логарифмов совпадают в обеих частях уравнения: $x - 2 = \sqrt{4x - 11}$. После преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 - 8x + 15 = 0$. Таким образом, $x = 5$ или $x = 3$. Но при $x = 3$ квадратный трехчлен $4x^2 - 19x + 22 = 1$, что соответствует уже рассмотренному случаю. Наконец, решение $x = 5$ принадлежит ОДЗ начального уравнения.

$$38. \left\{ \frac{\sqrt{7}-8}{3}, 2 \right\}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых положительны и отличны от 1 величины $x + 2$ и $3x + 10$, а также $3x^2 + 16x + 20 = (x + 2)(3x + 10) > 0$. Следовательно, $x > -2$ и $x \neq -1$.

Уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\log_{(x+2)}(3x^2 + 16x + 20) = \log_{\sqrt{3x+10}}(3x^2 + 16x + 20).$$

В результате получаем $3x^2 + 16x + 20 = 1$ или $x + 2 = \sqrt{3x + 10}$.

Если $3x^2 + 16x + 20 = 1$, то $3x^2 + 16x + 19 = 0$, поэтому $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-57}}{3} = \frac{-8 \pm \sqrt{7}}{3}$, при этом решение $x = -\frac{8+\sqrt{7}}{3}$ является посторонним, так как оно не входит в ОДЗ первоначального уравнения.

Если $x + 2 = \sqrt{3x + 10}$, то $(x + 2)^2 = 3x + 10$, откуда $x^2 + x - 6 = 0$. Следовательно, $x = 2$ или $x = -3$, причем решение $x = -3$ постороннее как не принадлежащее ОДЗ уравнения.

$$39. \left\{ \frac{1}{2}, 1 + \sqrt{2} \right\}.$$

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$\log_{\sqrt[3]{x}}(2x + 1) = 3 \log_x(2x + 1) = \frac{3}{\log_{(2x+1)} x},$$

$$1 + \log_{\sqrt{2x+1}}(2x + 1)x^3 = 3 + 3 \log_{\sqrt{2x+1}} x =$$

$$= 3 + 6 \log_{(2x+1)} x.$$

Рассмотрим новую переменную $z = \log_{(2x+1)} x$. Тогда $\frac{3}{z} = 3 + 6z$, т.е. $2z^2 + z - 1 = 0$, поэтому $z = -1$ или $z = \frac{1}{2}$.

Если $z = -1$, то получаем уравнение $x = \frac{1}{(2x+1)}$, т.е. $2x^2 + x - 1 = 0$. Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ или $x = -1$. Если

же $z = \frac{1}{2}$, то $x = \sqrt{2x+1}$, поэтому $x^2 - 2x - 1 = 0$, откуда $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Отметим, что ОДЗ начального уравнения состоит из тех x , для которых $x > 0$, $2x+1 > 0$, $x \neq 1$, $2x+1 \neq 1$, т.е. $x > 0$ и $x \neq 1$. В результате убеждаемся, что $x = -1$ и $x = 1 - \sqrt{2}$ являются посторонними решениями.

40. $\{-1\}$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$\log_{\sqrt{1-3x}}(1-x) = 2 \log_{(1-3x)}(1-x) = \frac{2}{\log_{(1-x)}(1-3x)},$$

$$4 - \log_{(1-x)}(1-4x+3x^2) =$$

$$= 4 - \log_{(1-x)}(1-x)(1-3x) = 3 - \log_{(1-x)}(1-3x).$$

Тогда для новой неизвестной $z = \log_{(1-x)}(1-3x)$ получаем уравнение $2/z = 3 - z$, откуда $z^2 - 3z + 2 = 0$. Следовательно, $z = 1$ или $z = 2$.

Если $z = \log_{(1-x)}(1-3x) = 1$, то $1-x = 1-3x$, поэтому $x = 0$. Если же $z = 2$, то $(1-x)^2 = 1-3x$, поэтому $x^2 + x = 0$. Следовательно, $x = 0$ или $x = -1$.

Здесь решение $x = 0$ является посторонним, так как при $x = 0$ основание логарифма $1-x = 1$. Легко убедиться (например, путем проверки), что $x = -1$ является решением первоначального уравнения.

41. $\{8/3\}$.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых $\frac{5}{3} < x < 3$, $x \neq 2$.

Преобразуем обе части уравнения:

$$\begin{aligned} \log_{(3-x)}(14x-3x^2-15) &= \\ = \log_{(3-x)}(3-x)(3x-5) &= 1 + \frac{1}{\log_{(3x-5)}(3-x)}, \\ \log_{\sqrt{3x-5}}(3-x) &= 2 \log_{(3x-5)}(3-x). \end{aligned}$$

Тогда для новой неизвестной $t = \log_{(3x-5)}(3-x)$ получаем уравнение $2t = -1 + \frac{1}{t}$, т.е. $2t^2 + t - 1 = 0$. Следовательно, $t = -1$ или $t = \frac{1}{2}$.

Если $t = \log_{(3x-5)}(3-x) = -1$, то $3-x = \frac{1}{3x-5}$, поэтому для x имеем квадратное уравнение $3x^2 - 14x + 16 = 0$, откуда $x = \frac{8}{3}$ или $x = 2$. Здесь решение $x = 2$ является посторонним.

Если $t = \log_{(3x-5)}(3-x) = \frac{1}{2}$, то $3-x = \sqrt{3x-5}$, поэтому $x^2 - 9x + 14 = 0$, откуда получаем $x = 7$ или $x = 2$. Оба корня являются посторонними решениями для исходного уравнения.

42. $\{7/3\}$.

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых $2 < x < \frac{10}{3}$ и $x \neq 3$.

Так как

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{10-3x}}(16x - 3x^2 - 20) &= 2 \log_{(10-3x)}(10 - 3x)(x - 2) = \\ &= 2 + \frac{2}{\log_{(x-2)}(10 - 3x)}, \end{aligned}$$

для новой неизвестной $z = \log_{(x-2)}(10 - 3x)$ получаем уравнение $z = 1 + \frac{2}{z}$, т.е. $z^2 - z - 2 = 0$. Следовательно, $z = -1$ или $z = 2$.

Если $z = -1$, то для неизвестной x имеем уравнение $10 - 3x = \frac{1}{x-2}$, поэтому $3x^2 - 16x + 21 = 0$. В результате получаем $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-63}}{3} = \frac{8 \pm 1}{3}$, т.е. $x = \frac{7}{3}$ или $x = 3$. Здесь корень $x = 3$ является посторонним решением для исходного уравнения.

Если $z = 2$, то $10 - 3x = (x-2)^2$, поэтому $x^2 - x - 6 = 0$. Следовательно, $x = 3$ или $x = -2$, при этом оба корня не входят в ОДЗ первоначального уравнения.

43. $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Решение. Очевидно, что обе части уравнения определены при $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того,

$$\log_{\sqrt{x+1}} x = 2 \log_{(x+1)} x = \frac{2}{\log_x(x+1)}$$

и $\log_x(x+1)^2 = 2 \log_x(x+1)$. Следовательно, для $z = \log_x(x+1)$ получаем уравнение $\frac{2}{z} + 2z = 5$, т.е. $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда $z = 2$ или $z = \frac{1}{2}$.

Если $z = 2$, то $(x+1) = x^2$, т.е. $x^2 - x - 1 = 0$. Следовательно, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, где решение $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ постороннее, поскольку не входит в ОДЗ уравнения.

Если $z = \frac{1}{2}$, то $1+x = \sqrt{x}$, поэтому $x^2 + 2x + 1 = x$, т.е. $x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет решений в области действительных чисел.

$$44. \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x , для которых $0 < x < \frac{1}{2}$.

Так как

$$\log_{\sqrt{x}}(1-2x) = 2 \log_x(1-2x)$$

и

$$\log_{(1-2x)} x = \frac{1}{\log_x(1-2x)},$$

уравнение можно записать в виде $2z + \frac{1}{z} = 3$, где новая неизвестная $z = \log_x(1-2x)$. Следовательно, для z получаем квадратное уравнение $2z^2 - 3z + 1 = 0$, откуда $z = 1$ или $z = \frac{1}{2}$.

Если $z = 1$, то $1-2x = x$, поэтому $x = \frac{1}{3}$. Если же $z = \frac{1}{2}$, то $1-2x = \sqrt{x}$, поэтому $1-4x+4x^2 = x$, т.е. $4x^2 - 5x + 1 = 0$. Следовательно, $x = 1$ или $x = \frac{1}{4}$. Корень $x = 1$ является посторонним решением для начального уравнения.

$$45. \left\{ 4, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\}.$$

Решение. Уравнение можно записать в виде $\frac{5}{z+3} = 2 - \frac{2}{z}$, где $z = \log_2 x$. После преобразований получаем квадратное

уравнение $2z^2 - z - 6 = 0$, поэтому $z = 2$ или $z = -\frac{3}{2}$. Если $z = 2$, то $x = 4$, если же $z = -\frac{3}{2}$, то $x = 1/(2\sqrt{2})$. Легко убедиться в том, что оба корня принадлежат ОДЗ первоначального уравнения.

46. $\left\{27, \frac{1}{9\sqrt{3}}\right\}$.

Решение. Уравнение можно записать в виде

$$\frac{\frac{11}{z} - 1}{z - 2} = 2 + \frac{2}{z},$$

где $z = \log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$. Тогда в результате преобразований последовательно получаем $\frac{11-z}{z-2} = 2z + 2$, $11 - z = 2(z+1)(z-2)$, $11 - z = 2z^2 - 2z - 4$, $2z^2 - z - 15 = 0$. Следовательно, $z = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4}$, $z = 3$ или $z = -\frac{5}{2}$.

Если $z = \log_3 x = 3$, то $x = 27$; если же $z = \log_3 x = -\frac{5}{2}$, то $x = 1/(9\sqrt{3})$. Очевидно, что оба корня принадлежат области допустимых значений исходного уравнения.

47. $\{3\}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} 2x - \log_{1/5}(2^{2x} + 3x - 9) &= \log_5 5^{2x} + \log_5(2^{2x} + 3x - 9) = \\ &= \log_5 (5^{2x}(2^{2x} + 3x - 9)) = \log_5 (10^{2x} + 5^{2x}(3x - 9)). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\log_5 (10^{2x} + 5^{2x}(3x - 9)) = \log_5 10^{2x},$$

поэтому $5^{2x}(3x - 9) = 0$, откуда $x = 3$.

48. $\{-2\}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} 7x - \log_{1/3}(5^{7x} + 4x + 8) &= \log_3 3^{7x} + \log_3(5^{7x} + 4x + 8) = \\ &= \log_3 (3^{7x}(5^{7x} + 4x + 8)) = \log_3 (15^{7x} + 3^{7x}(4x + 8)). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\log_3 (15^{7x} + 3^{7x}(4x + 8)) = \log_3 15^{7x},$$

поэтому $3^{7x}(4x + 8) = 0$, откуда получаем $4x + 8 = 0$, т.е. $x = -2$.

49. $\{2, 32\}$.

Решение. Так как $(\frac{1}{3})^{\log_2^2 x + 1} = 3^{-\log_2^2 x - 1}$ и $9^{2 - \log_2 x^3} = 3^{4 - 6 \log_2 x}$, получаем уравнение

$$3^{-\log_2^2 x - 1} = 3^{4 - 6 \log_2 x},$$

поэтому $-\log_2^2 x - 1 = 4 - 6 \log_2 x$ и $\log_2^2 x - 6 \log_2 x + 5 = 0$. В результате для новой неизвестной $z = \log_2 x$ имеем квадратное уравнение $z^2 - 6z + 5 = 0$, т.е. $z = 1$ или $z = 5$. Если $z = \log_2 x = 1$, то $x = 2$; если $z = 5$, то $x = 2^5 = 32$.

50. $\{1, 2\}$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} 2 + \log_2(3^{x-1} + 1) &= \log_2 4 + \log_2(3^{x-1} + 1) = \\ &= \log_2 4(3^{x-1} + 1), \end{aligned}$$

уравнение можно записать в виде

$$\log_2 (9^{x-1} + 7) = \log_2 4(3^{x-1} + 1),$$

поэтому $9^{x-1} + 7 = 4 \cdot 3^{x-1} + 4$, $9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$, $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$. Следовательно, для новой неизвестной $z = 3^x$ получаем квадратное уравнение $z^2 - 12z + 27 = 0$, откуда

$$z = 6 \pm \sqrt{36 - 27} = 6 \pm \sqrt{9} = 6 \pm 3, \quad z = 9 \quad \text{или} \quad z = 3,$$

т.е. $x = 2$ или $x = 1$.

51. $\{3, 9\}$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} 2 \log_{x/27} 3 \cdot \log_{9x} 3 &= \frac{2}{\log_3 (\frac{x}{27}) \cdot \log_3 (9x)} = \\ &= \frac{2}{(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 2)}, \end{aligned}$$

$$\log_{x/81} 3 = \frac{1}{\log_3 \left(\frac{x}{81}\right)} = \frac{1}{\log_3 x - 4},$$

получаем уравнение

$$\frac{2}{(z-3)(z+2)} = \frac{1}{z-4},$$

где $z = \log_3 x$. В результате преобразований это уравнение сводится к квадратному уравнению $z^2 - 3z + 2 = 0$, поэтому $z = 1$ или $z = 2$. Следовательно, $x = 3$ или $x = 9$.

52. $\{0, 2\}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} 2x + \log_3 \left(\frac{10}{3^x} - 1 \right) &= \log_3 3^{2x} + \log_3 \left(\frac{10}{3^x} - 1 \right) = \\ &= \log_3 \left(3^{2x} \left(\frac{10}{3^x} - 1 \right) \right) = \log_3 (10 \cdot 3^x - 9^x). \end{aligned}$$

Следовательно, данное уравнение можно записать в виде $\log_3 (10 \cdot 3^x - 9^x) = 2$, откуда $10 \cdot 3^x - 9^x = 9$, т.е. $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$. В результате для $z = 3^x$ имеем квадратное уравнение $z^2 - 10z + 9 = 0$, поэтому $z = 1$ или $z = 9$, т.е. $x = 0$ или $x = 2$.

53. $\{2, 32\}$.

Решение. Так как $6, 25 = (2, 5)^2 = (0, 4)^{-2}$, уравнение можно записать в виде

$$(0, 4)^{\log_2^2 x + 1} = (0, 4)^{-4 + 2 \log_2 x^3},$$

поэтому $\log_2^2 x + 1 = -4 + 6 \log_2 x$, $\log_2^2 x - 6 \log_2 x + 5 = 0$.

Следовательно, $\log_2 x = 1$ или $\log_2 x = 5$, т.е. $x = 2$ или $x = 32$.

54. $\{27, \frac{1}{9}\}$.

Решение. Так как $1, 25 = (0, 8)^{-1}$, уравнение можно записать в виде

$$(0, 8)^{\log_3^2 x - 2 \log_3 x} = (0, 8)^{6 - \log_3 x},$$

откуда получаем уравнение $\log_3^2 x - 2\log_3 x = 6 - \log_3 x$, т.е. $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$. Следовательно, $\log_3 x = -2$ или $\log_3 x = 3$, поэтому $x = \frac{1}{9}$ или $x = 27$.

55. $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$.

Решение. Так как

$$\log_2(9 - 2^{3x+1}) + 3x = \log_2((9 - 2^{3x+1})2^{3x}),$$

уравнение можно записать в виде

$$\log_2((9 - 2^{3x+1})2^{3x}) = \log_2 4,$$

откуда следует, что $(9 - 2^{3x+1})2^{3x} = 4$. В результате для новой неизвестной $z = 2^{3x}$ получаем квадратное уравнение $2z^2 - 9z + 4 = 0$, поэтому $z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$, $z = 4$ или $z = \frac{1}{2}$, т.е. $3x = 2$ или $3x = -1$, и, следовательно, $x = \frac{2}{3}$ или $x = -\frac{1}{3}$.

56. $\{3/2\}$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$\begin{aligned} x - \log_3 \sqrt{31 - 9^x} &= \\ &= \frac{1}{2}(\log_3 9^x - \log_3(31 - 9^x)) = \frac{1}{2} \log_3 \frac{9^x}{31 - 9^x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \log_3 \sqrt{1 + 3^{2(1-x)}} &= \\ &= \frac{1}{2}(\log_3 9 - \log_3(1 + 9^{1-x})) = \frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{1 + 9^{1-x}}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \log_3 \frac{9^x}{31 - 9^x} = \frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{1 + 9^{1-x}},$$

поэтому $\frac{9^x}{31-9^x} = \frac{9}{1+9^{1-x}}$. Учитывая, что правая часть последнего соотношения равна $\frac{9 \cdot 9^x}{9^x+9}$, для новой неизвестной $z = 9^x$ получаем уравнение

$$\frac{z}{31-z} = \frac{9z}{z+9},$$

откуда $z(z+9) = 9z(31-z)$, $z^2 + 9z = 279z - 9z^2$, $10z^2 - 270z = 0$.

Таким образом, $z = 0$ или $z = 27$. Здесь $z = 0$ является посторонним решением, так как $z = 9^x > 0$ для любых $z \in \mathbf{R}$. Если же $z = 9^x = 27$, то $x = \frac{3}{2}$. Легко убедиться (например, путем проверки), что $x = \frac{3}{2}$ действительно является решением первоначального уравнения.

57. $0 < a \leq 4$.

Решение. Пусть $u = \log_2(1-x-x^2)$. Тогда получаем уравнение $u = \frac{a}{u} + b$, т.е. $u^2 - bu - a = 0$. Условие разрешимости этого квадратного уравнения состоит в том, что $b^2 + 4a \geq 0$ (для всех $b > 0$), поэтому $a \geq 0$.

Далее, при изменении x от 0 до $\frac{1}{2}$ квадратный трехчлен $1-x-x^2$ монотонно убывает от 1 до $\frac{1}{4}$, а u убывает от 0 до -2 . Следовательно, необходимо найти условие на неотрицательное a , при котором для всех положительных b уравнение $u^2 - bu - a = 0$ имеет решение в интервале $-2 < u < 0$.

Рассмотрим корни квадратного уравнения $u^2 - bu - a = 0$:

$$u_1 = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4a}), \quad u_2 = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 + 4a}).$$

Решение u_1 удовлетворяет неравенству $u_1 \geq 0$, поэтому $u_1 \notin (-2, 0)$. В то же время второе решение u_2 удовлетворяет неравенству $u_2 \leq 0$ для всех $a \geq 0$ и $b > 0$, причем равенство $u_2 = 0$ справедливо только при $a = 0$, поэтому случай $a = 0$ следует исключить.

Таким образом, по условию задачи необходимо выяснить, для каких $a > 0$ выполняется неравенство $u_2 > -2$ для всех $b > 0$. Но это неравенство равносильно неравенству $4 + b >$

$> \sqrt{b^2 + 4a}$, откуда получаем $16 + 8b + b^2 > b^2 + 4a$, $4 + 2b > a$ (для всех $b > 0$), поэтому $4 \geq a$.

58. $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

Решение. Пусть $v = \log_4 \left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Тогда имеем уравнение $\frac{a}{v} = v + b$, поэтому $v^2 + bv - a = 0$. Это квадратное уравнение разрешимо в области действительных чисел тогда и только тогда, когда $b^2 + 4a \geq 0$ (для всех $b < 0$), поэтому $a \geq 0$.

Далее, функция $y = 1 - \frac{2}{x}$ в интервале $(4, +\infty)$ является монотонно возрастающей, а ее множество значений на этом интервале есть интервал $(\frac{1}{2}, 1)$. Следовательно, $v = \log_4(1 - 2/x)$ является монотонно возрастающей функцией на том же интервале $(4, +\infty)$ и имеет интервал $(-\frac{1}{2}, 0)$ множеством значений.

Таким образом, необходимо найти условие на неотрицательное a , при котором для всех отрицательных b уравнение $v^2 + bv - a = 0$ имеет решение в интервале $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Уравнение $v^2 + bv - a = 0$ имеет решения $v_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 + 4a})$. Здесь решение $v_2 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 + 4a}) \geq 0$, поэтому его необходимо исключить как не принадлежащее интервалу $(-\frac{1}{2}, 0)$. Рассмотрим решение v_1 . Условие $v_1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$ дает неравенство $-1 < -b - \sqrt{b^2 + 4a} < 0$.

Очевидно, что неравенство $-b - \sqrt{b^2 + 4a} \leq 0$ справедливо для любых $a \geq 0$, причем равенство $-b - \sqrt{b^2 + 4a} = 0$ возможно только при $a = 0$, поэтому случай $a = 0$ следует исключить.

Таким образом, по условию задачи необходимо выяснить, при каких $a > 0$ выполняется неравенство $-b - \sqrt{b^2 + 4a} > -1$ для всех $b < 0$. Но это неравенство равносильно неравенству $1 - b > \sqrt{b^2 + 4a}$, откуда получаем $1 - 2b + b^2 > b^2 + 4a$, $1 - 2b > 4a$ (для всех $b < 0$), поэтому $1 \geq 4a$ и $a \leq \frac{1}{4}$.

$$59. \left\{ \left(\frac{1}{\lg 3}, \lg 3 \right), (1, 1) \right\}.$$

Решение. Логарифмируя первое уравнение системы, получаем $x \lg 3 + y = \lg 3 + 1$. Если в это уравнение подставить $y = \frac{1}{x}$, то после преобразований имеем квадратное уравнение

$$(\lg 3)x^2 - (\lg 3 + 1)x + 1 = 0,$$

поэтому $x = \frac{1}{\lg 3}$ или $x = 1$, а $y = \lg 3$ или $y = 1$ соответственно.

$$60. \{(10, 4), (4, 10)\}.$$

Решение. Логарифмируя уравнения системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 4 + 1, \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4. \end{cases}$$

Следовательно, $\lg x$ и $\lg y$ являются решениями квадратного уравнения $z^2 - (\lg 4 + 1)z + \lg 4 = 0$. Так как $z = 1$ или $z = \lg 4$, то $(\lg x, \lg y) = (1, \lg 4)$ или $(\lg x, \lg y) = (\lg 4, 1)$, т.е. $(x, y) = (10, 4)$ или $(x, y) = (4, 10)$.

$$61. \{(343, 2), (49, 3)\}.$$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $y \log_7 x = 6$, поэтому получаем систему

$$\begin{cases} \log_7 x + y = 5, \\ y \log_7 x = 6. \end{cases}$$

Таким образом, по теореме Виета $\log_7 x$ и y являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$: $z = 3$ или $z = 2$. Если $\log_7 x = 3$ и $y = 2$, то $(x, y) = (343, 2)$; если же $y = 3$ и $\log_7 x = 2$, то $(x, y) = (49, 3)$.

$$62. \{(125, -1), (5, -3)\}.$$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $y \log_5 x = -3$, поэтому данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \log_5 x - y = 4, \\ (-y) \log_5 x = 3. \end{cases}$$

Таким образом, $\log_5 x$ и $-y$ являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 4z + 3 = 0$: $z = 1$ или $z = 3$. В результате получаем, что $(\log_5 x, -y) = (1, 3)$ или $(\log_5 x, -y) = (3, 1)$, т.е. $(x, y) = (5, -3)$ или $(x, y) = (125, -1)$.

63. $\{(\sqrt{2}, 2), (2, \sqrt{2})\}$.

Решение. Левая часть первого уравнения системы определена при $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Рассмотрим новую неизвестную $z = \log_x y$. Так как $\log_y x = \frac{1}{\log_x y} = \frac{1}{z}$, то первое уравнение системы можно записать в виде $\frac{1}{z} + z = \frac{5}{2}$, поэтому $2z^2 - 5z + 2 = 0$, т.е. $z = 2$ или $z = \frac{1}{2}$.

Если $z = 2$, то $y = x^2$. Тогда из второго уравнения системы получаем уравнение $x^4 + x^2 - 6 = 0$. Следовательно, $x^2 = 2$ или $x^2 = -3$. Очевидно, что второе решение является посторонним. Если $x^2 = 2$, то $x = \pm\sqrt{2}$. Однако $x = -\sqrt{2}$ не принадлежит ОДЗ. В случае $x = \sqrt{2}$ получаем $y = 2$.

Если $z = \frac{1}{2}$, то $y = \sqrt{x}$. Тогда из второго уравнения системы следует, что $x^2 + x - 6 = 0$, поэтому $x = 2$ или $x = -3$. Здесь $x = -3$ является посторонним решением. Если же $x = 2$, то $y = \sqrt{2}$.

64. $\{(2\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

Решение. Левая часть первого уравнения системы определена при $x > 0$, $x \neq 1$ и $x > y$. Так как

$$\frac{2}{\log_2 x} - \log_x(x-y) = 2 \log_x 2 - \log_x(x-y) = \log_x \frac{4}{x-y} = 1,$$

то $\frac{4}{x-y} = x$, поэтому $4 = x(x-y)$. Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - xy = 4. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, имеем $xy + y^2 = 6$, поэтому $x = \frac{6-y^2}{y}$. Подставляя это выражение для x в первое уравнение, получаем

$$\frac{(6 - y^2)^2}{y^2} + y^2 = 10,$$

откуда в результате преобразований имеем уравнение $y^4 - 11y^2 + 18 = 0$. Таким образом,

$$y^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2},$$

$$y^2 = 9 \quad \text{или} \quad y^2 = 2,$$

т.е. $y = \pm 3$ или $y = \pm\sqrt{2}$.

Если $y = \pm 3$, то $x^2 = 10 - y^2 = 10 - 9 = 1$ и $x = \pm 1$. Эти решения являются посторонними. Если же $y = \pm\sqrt{2}$, то $x^2 = 10 - y^2 = 10 - 2 = 8$, поэтому $x = \pm 2\sqrt{2}$, при этом второе решение $x = -2\sqrt{2}$ постороннее. Следовательно, $(x, y) = (2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$. Наконец, $y = \frac{6-y^2}{x}$, поэтому $y = \frac{6-2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, а решение $y = -\sqrt{2}$ является посторонним.

Итак, $(x, y) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Это решение действительно является решением первоначальной системы, в чем легко убедиться путем проверки.

65. $\{(2, 3), (\log_2 3, 4)\}$.

Решение. Потенцируя второе уравнение, получаем $y/3 = 4 \cdot 2^{-x}$, поэтому $2^x \cdot y = 12$. Следовательно, с учетом ОДЗ имеем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + y = 7, \\ 2^x \cdot y = 12. \end{cases}$$

По теореме Виета величины 2^x и y являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 7z + 12 = 0$, т.е. $z = 4$ или $z = 3$.

Если $2^x = 4$ и $y = 3$, то $(x, y) = (2, 3)$; если же $y = 4$ и $2^x = 3$, то $(x, y) = (\log_2 3, 4)$.

66. $\{(2, 3), (\frac{1}{8}, -1)\}$.

Решение. Логарифмируя второе уравнение системы, получаем $y \log_2 x = 3$, поэтому

$$\begin{cases} y + (-\log_2 x) = 2, \\ y \cdot (-\log_2 x) = -3. \end{cases}$$

Тогда по теореме Виета величины $-\log_2 x$ и y являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 2z - 3 = 0$: $z = 3$ или $z = -1$.

Если $(-\log_2 x, y) = (3, -1)$, то $(x, y) = (1/8, -1)$; если $(-\log_2 x, y) = (-1, 3)$, то $(x, y) = (2, 3)$.

67. $\{(8, 4)\}$.

Решение. Область допустимых значений системы уравнений состоит из тех x, y , для которых $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$.

Из второго уравнения системы имеем $x + 2 = 1$ или $y - 4 = 0$. Если $x + 2 = 1$, то $x = -1$. Однако $x = -1$ не принадлежит ОДЗ. Если же $y - 4 = 0$, то $y = 4$, причем это решение не является посторонним. Подставляя $y = 4$ в первое уравнение системы, получаем уравнение $8 \log_x 8 = x$. Его можно записать в виде $\frac{8}{x} = \log_8 x$.

При $x > 0$ левая часть последнего уравнения является строго убывающей функцией, а правая — строго возрастающей. Следовательно, равенство возможно только для одного значения $x = 8$. Это значение принадлежит ОДЗ начальной системы.

68. $\{(4, 3)\}$.

Решение. Область допустимых значений системы уравнений состоит из тех x, y , для которых $x > 0$, $x \neq 1$ и $y > 2$.

Из второго уравнения системы имеем $y - 2 = 1$ или $x + 1 = 0$. Если $x + 1 = 0$, то $x = -1$. Однако $x = -1$ не входит в ОДЗ. Если же $y - 2 = 1$, то $y = 3$, причем это решение не является посторонним. Подставляя $y = 3$ в первое уравнение,

получаем уравнение $\log_x \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{x}{4} = 0$. Его можно записать в виде $\log_4 x = \frac{4}{x}$.

При $x > 0$ левая часть последнего уравнения является строго возрастающей функцией, а правая — строго убывающей. Следовательно, равенство возможно только для одного значения $x = 4$.

69. $\{(1, 2)\}$.

Решение. Обе части каждого уравнения системы определены для всех x и для $y > 0$.

Из второго уравнения системы имеем $x = 2 - \log_2 y$, поэтому $2^x = \frac{4}{y}$. Подставляя эту величину в первое уравнение, получаем $(4y^2 - y + 6)\frac{4}{y} = 20y$, т.е. $y^2 + y - 6 = 0$. Следовательно, $y = 2$ или $y = -3$, при этом $y = -3$ является посторонним решением. Если же $y = 2$, то $2^x = \frac{4}{y} = \frac{4}{2} = 2$, и, значит, $x = 1$.

70. $\{(3, -2)\}$.

Решение. Система уравнений определена для всех y и для $x > 0$.

Из второго уравнения системы имеем $x = 3 \cdot 2^{y+2} = 12 \cdot 2^y$, поэтому $2^y = \frac{x}{12}$. Подставляя это значение для 2^y в первое уравнение, получаем $\frac{4+x}{1+x} = \frac{7x}{12}$, поэтому $12(4+x) = 7x(1+x)$, $48 + 12x = 7x + 7x^2$, $7x^2 - 5x - 48 = 0$. В результате получаем, что

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1344}}{14} = \frac{5 \pm \sqrt{1369}}{14} = \frac{5 \pm 37}{14},$$
$$x = 3 \quad \text{или} \quad x = -16/7,$$

причем второй корень не входит в ОДЗ.

Таким образом, $x = 3$, поэтому $2^y = \frac{x}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, т.е. $y = -2$.

71. $\{(k\pi, k\pi) : k = 1, 2, \dots\}$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$.

Из второго уравнения системы имеем $x = 1$ или $\operatorname{tg} y = 0$. Однако $x = 1$ не принадлежит ОДЗ системы. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{tg} y = 0$. Тогда $y = k\pi$, причем в область допустимых значений входят только те решения, которые соответствуют $k = 1, 2, \dots$.

Зафиксируем любое из таких y и рассмотрим функции переменной x :

$$f(x) = x + y, \quad g(x) = 2y \log_x y.$$

Функция f строго возрастает, а g строго убывает, поэтому равенство $f(x) = g(x)$ возможно только при одном значении x . Это значение $x = y$. Следовательно, $(x, y) = (k\pi, k\pi)$ ($k = 1, 2, \dots$).

$$72. \left\{ \left(k\pi, \frac{1}{k\pi} \right) : k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Решение е. Область допустимых значений: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$.

Из второго уравнения системы имеем $y = 1$ или $\sin x = 0$. Если $y = 1$, то из первого уравнения получаем $x = 0$, но это значение не принадлежит ОДЗ. Если же $\sin x = 0$, то $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), причем в область допустимых значений входят только те $x = k\pi$, для которых $k = 1, 2, \dots$.

Зафиксируем любое из таких x и рассмотрим функции переменной y :

$$f(y) = xy, \quad g(y) = \log_x \left(\frac{1}{y} \right).$$

Тогда первое уравнение системы можно записать в виде $f(y) = g(y)$. Так как $x > 0$, функция f является строго монотонно возрастающей функцией переменной y . Учитывая, что дополнительно $x > 1$, функция g является строго монотонно убывающей функцией. Следовательно, равенство $f(y) = g(y)$ возможно только при одном значении y : $y = x^{-1}$. Таким образом, решениями системы являются $(x, y) = \left(k\pi, \frac{1}{k\pi} \right)$ ($k = 1, 2, \dots$).

73. $\{(4, 2)\}$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$, $x \neq 1$, $y < 3$.

Из второго уравнения системы получаем $x + 3 = 1$ или $\log_5(3 - y) = 0$. Если $x + 3 = 1$, то $x = -2$ не принадлежит ОДЗ. Если же $\log_5(3 - y) = 0$, то $3 - y = 1$, т.е. $y = 2$.

Подставляя $y = 2$ в первое уравнение системы, получаем

$$4(3 + 10 \log_x 2) = x^2 + x + 12, \quad 40 \log_x 2 = x^2 + x, \\ \frac{40}{x^2 + x} = \log_2 x.$$

При $x > 0$ левая часть последнего уравнения есть строго убывающая функция $f(x) = \frac{40}{x^2 + x}$, а правая — строго возрастающая функция $g(x) = \log_2 x$. Следовательно, это уравнение может иметь только одно решение. Искомое решение есть $x = 4$, так как

$$f(4) = \frac{40}{16 + 4} = 2, \quad g(4) = \log_2 4 = 2.$$

74. $\{(9, 3)\}$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 2$.

Из второго уравнения системы получаем $y - 2 = 1$ или $\log_9(x + 8) = 1$. Если $\log_9(x + 8) = 1$, то $x + 8 = 9$, т.е. $x = 1$. Но $x = 1$ не входит в ОДЗ. Если же $y - 2 = 1$, то $y = 3$.

Подставим $y = 3$ в первое уравнение системы. Тогда

$$\log_x \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{x}{x + 9} = 0,$$

поэтому $\frac{x}{x + 9} = \log_x 3$. Последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{x}{x + 9} = \frac{1}{\log_3 x}$$

и рассмотрим две функции $f(x) = \frac{x}{x+9}$ и $g(x) = \frac{1}{\log_3 x}$. Ясно, что для $x \in (0, 1)$ справедливы неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) < 0$, поэтому на интервале $(0, 1)$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений.

Далее, при $x > 1$ функция f является строго монотонно возрастающей функцией, а g — строго монотонно убывающей. Следовательно, равенство $f(x) = g(x)$ возможно только при одном значении x . Это значение $x = 9$, так как

$$f(9) = \frac{9}{9+9} = \frac{1}{2}, \quad g(9) = \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2}.$$

75. $\frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{9}$.

Решение. Обе части неравенства определены только при $x \geq \frac{1}{5}$. Запишем неравенство в виде $\sqrt{5x-1} < 1-3x$.

Так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, неравенство не выполняется при $1-3x \leq 0$, т.е. при $x \geq \frac{1}{3}$.

Предположим, что $\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{3}$. Тогда после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство $5x-1 < 1-6x+9x^2$, т.е. $9x^2-11x+2 > 0$. Таким образом, $x > 1$ или $x < \frac{2}{9}$. Учитывая, что $\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{3}$, имеем $\frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{9}$.

76. $-2 \leq x < -1$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых $6+x-x^2 \geq 0$, т.е. $x^2-x-6 \leq 0$. Так как корнями квадратного трехчлена x^2-x-6 являются $x = -2$ и $x = 3$, то ОДЗ есть промежуток $[-2, 3]$.

Данное неравенство запишем в виде $\sqrt{6+x-x^2} < 1-x$. Так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, неравенство не имеет решений при $1-x \leq 0$, т.е. при $x \geq 1$.

Если $-2 \leq x < 1$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем, что $6+x-x^2 < 1-2x+x^2$, откуда $2x^2-3x-5 > 0$, т.е. $x < -1$ или $x > \frac{5}{2}$.

Таким образом, решения последнего неравенства вместе с условием $-2 \leq x < 1$ дают $-2 \leq x < -1$.

$$77. \frac{5-3\sqrt{5}}{10} < x \leq 2.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых $2+x-x^2 = -(x+1)(x-2) \geq 0$, т.е. $-1 \leq x \leq 2$.

Если $1-2x < 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$, то данное неравенство справедливо, так как квадратный корень, стоящий в левой части неравенства, всегда принимает неотрицательные значения. Сравнивая его с ОДЗ, получаем $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Если $1-2x \geq 0$, т.е. $x \leq \frac{1}{2}$, то исходное неравенство равносильно неравенству $2+x-x^2 > 1-4x+4x^2$, т.е. $5x^2-5x-1 < 0$, откуда получаем $\frac{5-\sqrt{45}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{45}}{10}$. Следовательно, $\frac{5-3\sqrt{5}}{10} < x \leq \frac{1}{2}$, так как $\frac{5-3\sqrt{5}}{10} > -1$ и $\frac{5+3\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}$.

Объединяя решения в обоих случаях, окончательно получаем, что $\frac{5-3\sqrt{5}}{10} < x \leq 2$.

$$78. \frac{1+\sqrt{13}}{6} < x \leq 1 \text{ или } x \geq 2.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \geq 0$, откуда $x \leq 1$ или $x \geq 2$.

Если $2x-1 \leq 0$, то неравенство не имеет решений, так как квадратный корень, стоящий в левой части неравенства, всегда принимает неотрицательные значения.

Рассмотрим случай, когда $2x-1 > 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $x^2-3x+2 < 4x^2-4x+1$, откуда $3x^2-x-1 > 0$. Следовательно, $x < \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ или $x > \frac{1+\sqrt{13}}{6}$. Учитывая, что $\frac{1-\sqrt{13}}{6} < \frac{1}{2}$ и $1 > \frac{1+\sqrt{13}}{6} > \frac{1}{2}$, окончательно получаем $\frac{1+\sqrt{13}}{6} < x \leq 1$ или $x \geq 2$.

$$79. (-3, 7/3] \cup [6, +\infty).$$

Решение. Квадратный трехчлен, стоящий под знаком корня, должен быть неотрицательным, поэтому ОДЗ неравенства состоит из всех $x \leq \frac{7}{3}$ или $x \geq 6$.

Запишем данное неравенство в виде $\sqrt{(6-x)(7-3x)} > -4x$. Если $x > 0$, то $-4x < 0$ и неравенство справедливо, так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения. Учитывая ОДЗ, получаем $0 < x \leq \frac{7}{3}$ или $x \geq 6$.

Если же $x \leq 0$, то $-4x \geq 0$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство $(6-x)(7-3x) > 16x^2$, т.е. $13x^2 + 25x - 42 < 0$. Корни квадратного трехчлена

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 2184}}{26} = \frac{-25 \pm \sqrt{2809}}{26} = \frac{-25 \pm 53}{26},$$

$$x_1 = \frac{14}{13} \quad \text{и} \quad x_2 = -3.$$

Следовательно, $-3 < x < 14/13$, а с учетом условия $x \leq 0$ имеем $-3 < x \leq 0$.

Наконец, остается объединить решения $(-3, 0]$ и $(0, 7/3] \cup [6, +\infty)$.

$$80. [-4, -2/5).$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых квадратный трехчлен $24 + 2x - x^2 = -(x+4)(x-6) \geq 0$, поэтому ОДЗ есть промежуток $[-4, 6]$.

Данное неравенство запишем в виде $\sqrt{24 + 2x - x^2} < 2(2 - x)$. Оно не имеет решений на промежутке $[2, 6]$, так как для $x \in [2, 6]$ правая часть последнего неравенства $2(2 - x) \leq 0$, а квадратный корень слева принимает только неотрицательные значения.

Если же $-4 \leq x < 2$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $24 + 2x - x^2 < 16 - 16x + 4x^2$, поэтому $5x^2 - 18x - 8 > 0$. Следовательно, $x > 4$ или $x < -\frac{2}{5}$.

Эти решения вместе с условием $-4 \leq x < 2$ дают значения $-4 \leq x < -\frac{2}{5}$.

$$81. \frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < +\infty.$$

Решение. Левая часть неравенства определена при условии $x^2 + x \geq 0$, т.е. $x \geq 0$ или $x \leq -1$.

Если $1 - 2x < 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$, то неравенство справедливо, так как квадратный корень всегда принимает неотрицательные значения.

Предположим, что $1 - 2x \geq 0$. Тогда после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство $x^2 + x > 1 - 4x + 4x^2$, поэтому $3x^2 - 5x + 1 < 0$. Корни квадратного трехчлена $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. Следовательно, это неравенство имеет решение $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$, что вместе с условием $1 - 2x \geq 0$ дает $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x \leq \frac{1}{2}$. Наконец, полученные решения необходимо объединить:

$$\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) = \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, +\infty \right).$$

$$82. 1 \leq x < \frac{25+3\sqrt{5}}{10}.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых $5x - x^2 - 4 \geq 0$, т.е. $x^2 - 5x + 4 \leq 0$, поэтому $1 \leq x \leq 4$.

Если $2x - 5 < 0$, т.е. $x < \frac{5}{2}$, то неравенство выполняется, так как квадратный корень слева всегда принимает неотрицательные значения. Учитывая ОДЗ, в этом случае имеем $1 \leq x < \frac{5}{2}$.

Если же $2x - 5 \geq 0$, т.е. $x \geq \frac{5}{2}$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство $5x - x^2 - 4 > 4x^2 - 20x + 25$, откуда $5x^2 - 25x + 29 < 0$. Корни квадратного трехчлена $x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625-580}}{10} = \frac{25 \pm \sqrt{45}}{10} = \frac{25 \pm 3\sqrt{5}}{10}$, поэтому последнее неравенство имеет решение

$$\frac{25-3\sqrt{5}}{10} < x < \frac{25+3\sqrt{5}}{10}.$$

Так как $\frac{25-3\sqrt{5}}{10} < \frac{5}{2} < \frac{25+3\sqrt{5}}{10} < 4$, в случае $x \geq \frac{5}{2}$ получаем решение исходного неравенства $\frac{5}{2} \leq x < \frac{25+3\sqrt{5}}{10}$. Наконец, остается объединить решения в обоих случаях:

$$\left[1, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{25+3\sqrt{5}}{10}\right) = \left[1, \frac{25+3\sqrt{5}}{10}\right).$$

83. $1 \leq x < \frac{3}{2}$.

Решение. Обе части неравенства определены при $x+3 \geq 0$, $2x-1 \geq 0$, $x-1 \geq 0$, поэтому ОДЗ неравенства есть $[1, +\infty)$.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$ и возведем обе части его в квадрат. В результате получим равносильное неравенство

$$x+3 > x-1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} + 2x-1,$$

поэтому $5-2x > 2\sqrt{(x-1)(2x-1)}$. Однако последнее неравенство не имеет решений, если $5-2x \leq 0$, т.е. $x \geq \frac{5}{2}$. Если же $1 \leq x < \frac{5}{2}$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства находим (с учетом условия для x) равносильное неравенство $25-20x+4x^2 > 4(x-1)(2x-1)$, т.е. $4x^2+8x-21 < 0$. Таким образом, $-\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}$, что в пересечении с промежутком $[1, 5/2)$ дает $[1, 3/2)$.

84. $3 \leq x < 4$.

Решение. Обе части неравенства определены при $9+4x \geq 0$, $x-3 \geq 0$, $4+3x \geq 0$, т.е. $x \geq -\frac{9}{4}$, $x \geq 3$, $x \geq -\frac{4}{3}$. Следовательно, ОДЗ неравенства состоит из всех $x \geq 3$.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{9+4x} > \sqrt{x-3} + \sqrt{4+3x}$ и возведем обе его части в квадрат. В результате получим равносильное неравенство

$$9+4x > x-3 + 2\sqrt{(x-3)(4+3x)} + 4+3x,$$

поэтому $4 > \sqrt{(x-3)(4+3x)}$. Если еще раз возвести в квадрат обе части неравенства, то получим $16 > (x-3)(4+3x)$, $16 > 3x^2 - 5x - 12$, $3x^2 - 5x - 28 < 0$.

Корни квадратного трехчлена слева в последнем неравенстве

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{6} = \frac{5 \pm 19}{6},$$

$$x_1 = 4 \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{7}{3}.$$

Следовательно, $-\frac{7}{3} < x < 4$, что в пересечении с ОДЗ дает $3 \leq x < 4$.

$$85. \quad 0 < x \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2} \quad \text{или} \quad x \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Решение. Неравенство можно записать в виде

$$5 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \leq 2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 + 2.$$

Тогда для $z = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ получим квадратное неравенство $2z^2 - 5z + 2 \geq 0$, поэтому $z \geq 2$ или $z \leq \frac{1}{2}$.

Если $z = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 2$, то $2x - 4\sqrt{x} + 1 \geq 0$, поэтому $\sqrt{x} \leq \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\sqrt{x} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Учитывая, что

ОДЗ состоит из всех $x > 0$, получаем $0 < x \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ или $x \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Если $z = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$, то $2x - \sqrt{x} + 1 \leq 0$. Это неравенство не имеет решений, так как $2x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} > 0$.

Таким образом, $0 < x \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ или $x \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

$$86. \frac{1}{4} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Неравенство запишем в виде $(4x - 4 + \frac{1}{x}) \leq (2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) + 2$, т.е. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \leq (2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) + 2$. Следовательно, для $z = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ получаем неравенство $z^2 \leq z + 2$, поэтому $z^2 - z - 2 \leq 0$, откуда $-1 \leq z \leq 2$.

Если $z = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq -1$, то $2x - 1 \geq -\sqrt{x}$, поэтому $2x + \sqrt{x} - 1 \geq 0$. В результате находим $\sqrt{x} \leq -1$ или $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}$. Здесь первое неравенство не имеет решений, а из второго $x \geq \frac{1}{4}$.

Если $z = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 2$, то $2x - 1 \leq 2\sqrt{x}$, поэтому $2x - 2\sqrt{x} - 1 \leq 0$. Следовательно, $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x} \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Однако обе части неравенства определены только при $x > 0$, поэтому

$$0 < x \leq \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, $0 < x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x \geq \frac{1}{4}$, т.е. $\frac{1}{4} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$87. 1 \leq x < 4(2 + \sqrt{3}).$$

Решение. Левая часть неравенства определена при $x \geq 1$ и $x - 2\sqrt{x-1} \geq 0$. При $x \geq 1$ последнее неравенство равносильно неравенству $x^2 \geq 4(x-1)$, т.е. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$. Это неравенство справедливо для любых x , так как левая часть его является полным квадратом. Следовательно, ОДЗ состоит из всех $x \geq 1$.

При $x \geq 1$ после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство

$$x + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} + x - 2\sqrt{x-1} > \frac{x^2}{4},$$

поэтому $2x + 2|x-2| > \frac{x^2}{4}$.

Если $x \geq 2$, то $|x - 2| = x - 2$ и $x^2 - 16x + 16 < 0$. Следовательно, $4(2 - \sqrt{3}) < x < 4(2 + \sqrt{3})$. Учитывая неравенство $4(2 - \sqrt{3}) < 2$, в рассматриваемом случае получаем решение $2 \leq x < 4(2 + \sqrt{3})$.

Если $1 \leq x < 2$, то $|x - 2| = 2 - x$. В результате имеем неравенство $x^2 < 16$, поэтому $|x| < 4$, что приводит к решению $1 \leq x < 2$.

В заключение остается только объединить полученные решения.

$$88. x > 2 + \sqrt{2}.$$

Решение. Левая часть неравенства определена для всех x , для которых $2x - 1 \geq 0$ и $x - \sqrt{2x - 1} \geq 0$, поэтому $x \geq \frac{1}{2}$ и $x^2 \geq 2x - 1$, т.е. $x \geq \frac{1}{2}$ и $(x - 1)^2 \geq 0$. Следовательно, ОДЗ неравенства состоит из всех $x \geq \frac{1}{2}$.

При $x \geq \frac{1}{2}$ после возведения в квадрат обеих частей данного неравенства получаем равносильное неравенство

$$x - \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{x^2 - (2x - 1)} + x + \sqrt{2x - 1} < x^2,$$

поэтому $2x + 2\sqrt{(x - 1)^2} < x^2$, $2x + 2|x - 1| < x^2$.

Если $x \geq 1$, то $|x - 1| = x - 1$, поэтому имеем неравенство $4x - 2 < x^2$, т.е. $x^2 - 4x + 2 > 0$. Следовательно, $x < 2 - \sqrt{2}$ или $x > 2 + \sqrt{2}$. Учитывая неравенство $2 - \sqrt{2} < 1$, в рассматриваемом случае получаем решение $x > 2 + \sqrt{2}$.

Если $\frac{1}{2} \leq x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$, поэтому имеем неравенство $2 < x^2$, т.е. $|x| > \sqrt{2}$. Следовательно, в этом случае решения отсутствуют.

$$89. \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right).$$

Решение. Левая часть неравенства определена для всех x , для которых $1 - x \geq 0$, $1 + x \geq 0$ и $4 - 4x^2 + 2(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} > 0$. Из неравенств $1 - x \geq 0$ и $1 + x \geq 0$ получаем $-1 \leq x \leq 1$. В то же время для всех $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство $4(1 - x^2) + 2(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} \geq 0$,

причем левая часть этого неравенства равна нулю только при $x = \pm 1$. Таким образом, ОДЗ есть интервал $(-1, +1)$.

Для $x \in (-1, 1)$ последовательно получаем равносильные неравенства

$$\begin{aligned} (1-x)\sqrt{1-x} + (1+x)\sqrt{1+x} &\geq \\ &\geq \sqrt{4-4x^2} + 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-x)^3 + 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + (1+x)^3 &\geq \\ &\geq 4-4x^2 + 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-x)^3 + (1+x)^3 &\geq 4-4x^2, \\ 2+6x^2 &\geq 4-4x^2, \quad x^2 \geq \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Следовательно, $x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $x \leq -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Учитывая, что $-1 < x < 1$, окончательно находим $-1 < x \leq -\frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq x < 1$.

90. $0 < x < \frac{1}{2}$.

Решение. Левая часть неравенства определена для всех x , для которых $x \geq 0$, $1-x \geq 0$, $x-x^2 \geq 0$ и $x^2 - 2(x^2-x)\sqrt{x-x^2} > 0$. Из неравенств $x \geq 0$ и $1-x \geq 0$ получаем $0 \leq x \leq 1$. В то же время для всех $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство $x-x^2 \geq 0$. Неравенство $x^2 - 2(x^2-x)\sqrt{x-x^2} > 0$ запишем в виде

$$x^2 + 2(x-x^2)\sqrt{x-x^2} > 0.$$

Здесь для всех $x \in [0, 1]$ левая часть неравенства является суммой неотрицательных величин, поэтому выполняется неравенство $x^2 + 2(x-x^2)\sqrt{x-x^2} \geq 0$, причем равенство справедливо только при $x = 0$. Таким образом, ОДЗ неравенства есть $(0, 1]$.

Считая, что $0 < x \leq 1$, запишем исходное неравенство в виде

$$x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x} > \sqrt{x^2 - 2(x^2 - x)\sqrt{x - x^2}}$$

и возведем обе части неравенства в квадрат. Тогда получим равносильное неравенство

$$x^3 + 2x\sqrt{x}(1-x)\sqrt{1-x} + (1-x)^3 > x^2 - 2(x^2 - x)\sqrt{x - x^2},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} x^3 + 2(x - x^2)\sqrt{x - x^2} + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 &> \\ &> x^2 + 2(x - x^2)\sqrt{x - x^2}, \\ 1 - 3x + 3x^2 &> x^2, \quad 2x^2 - 3x + 1 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $x < \frac{1}{2}$ или $x > 1$. Сравнивая с ОДЗ, получим решение $0 < x < \frac{1}{2}$.

91. $-\frac{3}{4} < x < 1$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $1-x > 0$, $1+x \geq 0$, $2\sqrt{1+x}-1 \neq 0$, поэтому $-1 \leq x < -\frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{4} < x < 1$.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{2(1+x) - \sqrt{1+x} + 1-x}{\sqrt{1-x}(2\sqrt{1+x}-1)} \geq 0.$$

Если $-1 \leq x < -\frac{3}{4}$, то $2\sqrt{1+x}-1 < 0$, поэтому

$$2(1+x) - \sqrt{1+x} + 1-x \leq 0,$$

т.е. $\sqrt{1+x} \geq 3+x$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим равносильное неравенство $1+x \geq$

$\geq 9 + 6x + x^2$, поэтому $x^2 + 5x + 8 \leq 0$. Так как дискриминант квадратного трехчлена слева отрицательный, последнее неравенство не имеет решений.

Предположим, что $-\frac{3}{4} < x < 1$. Тогда $2\sqrt{1+x} - 1 > 0$, поэтому $\sqrt{1+x} \leq 3+x$. Последнее неравенство справедливо для всех рассматриваемых x .

92. $-1 \leq x < 0$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых $1 - x > 0$, $1 + x \geq 0$ и $1 - \sqrt{1+x} \neq 0$, т.е. $-1 \leq x < 0$ или $0 < x < 1$.

Приводя левую часть неравенства к общему знаменателю, данное неравенство можно записать в виде

$$\frac{1 - \sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(1 - \sqrt{1+x})} \leq 0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $-1 \leq x < 0$. Тогда $1 - \sqrt{1+x} > 0$, поэтому получаем неравенство $1 - \sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} \leq 0$, т.е. $1 \leq \sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x}$. Возводя в квадрат обе части последнего неравенства, имеем неравенство $1 \leq 5 - 3x + 4\sqrt{1-x^2}$, поэтому $3x - 4 \leq 4\sqrt{1-x^2}$. Данное неравенство выполняется для всех рассматриваемых x , так как $3x - 4 < 0$.

Предположим теперь, что $0 < x < 1$. Тогда $1 - \sqrt{1+x} < 0$, поэтому $1 - \sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} \geq 0$, т.е. $3x - 4 \geq 4\sqrt{1-x^2}$. Последнее неравенство не имеет решений в интервале $(0, 1)$, так как левая часть $3x - 4 < 0$, а правая часть является неотрицательной величиной.

Таким образом, начальное неравенство имеет решение $-1 \leq x < 0$.

93. Если $0 < a < 1$, то $x \leq -6$ или $2 < x < 14/3$; если $a > 1$, то $x > 14/3$.

Решение. Величина, стоящая под знаком квадратного корня, должна быть неотрицательной, т.е. $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6) \geq 0$, поэтому $x \geq 2$ или $x \leq -6$.

Предположим, что $0 < a < 1$. Тогда имеем неравенство $\sqrt{(x-2)(x+6)} > 2(x-2)$. Если $x \geq 2$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $(x-2)(x+6) > 4(x-2)^2$. Следовательно, $x \neq 2$ и $x+6 > 4(x-2)$. Это дает решение $2 < x < 14/3$. Если же $x \leq -6$, то неравенство справедливо для всех рассматриваемых x , так как его левая часть неотрицательная, а правая часть $2(x-2) < 0$.

Таким образом, получаем решения $x \leq -6$ или $2 < x < 14/3$.

Пусть $a > 1$. Тогда имеем неравенство $\sqrt{(x-2)(x+6)} < 2(x-2)$. Если $x \geq 2$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства и сокращения на $x-2$ находим $x > 14/3$. Если же $x \leq -6$, то у неравенства решения отсутствуют, так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, а $2(x-2) < 0$. Следовательно, в случае, когда $a > 1$, имеем решение $x > 14/3$.

94. Если $|a| \leq \sqrt{2}$, то неравенство не имеет решений; если $|a| > \sqrt{2}$, то

$$a - \sqrt{a^2 - 1} + 1 < x < a + \sqrt{a^2 - 1} - 1.$$

Решение. Неравенство можно записать в виде

$$2|x - a| + (x^2 - 2ax + a^2) < a^2 - 2,$$

т.е.

$$2|x - a| + |x - a|^2 < a^2 - 2.$$

Предположим сначала, что $a^2 - 2 \leq 0$. Тогда у неравенства решения отсутствуют, так как его левая часть принимает только неотрицательные значения.

Далее, пусть $a^2 - 2 > 0$, т.е. $|a| > \sqrt{2}$. Рассмотрим новую переменную $y = |x - a|$. Тогда для y имеем неравенство $y^2 + 2y < a^2 - 2$, т.е. $(y + 1)^2 < a^2 - 1$. Учитывая, что $y + 1 > 0$, получаем $y + 1 < \sqrt{a^2 - 1}$, поэтому $|x - a| < \sqrt{a^2 - 1} - 1$. Освобождаясь от знака абсолютной величины,

решение неравенства можно записать в виде $a - \sqrt{a^2 - 1} + 1 < x < a + \sqrt{a^2 - 1} - 1$.

95. $x < -\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$ или $x > \sqrt{2}$.

Решение. Область допустимых значений состоит из всех x , для которых $|x| \geq 1$.

Предположим сначала, что $x \leq -1$. Тогда неравенство можно записать в виде $(x^2 - 1)^3 - \sqrt{(x^2 - 1)^3} - 2 > 0$, поэтому для новой переменной $z = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$ получаем $z \geq 0$ и $z^2 - z - 2 > 0$. Следовательно, $z > 2$, поэтому $x^2 > 1 + \sqrt[3]{4}$. Так как $x \leq -1$, окончательно находим $x < -\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$.

Если же $x \geq 1$, то получаем неравенство $(x^2 - 1)^3 + \sqrt{(x^2 - 1)^3} - 2 > 0$, поэтому для новой переменной $z = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$ имеем $z \geq 0$ и $z^2 + z - 2 > 0$. Следовательно, $z \geq 1$, поэтому $x \geq \sqrt{2}$.

96. $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{41})$, $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{33})$.

Решение. Сначала выясним, для каких x данные величины попарно принимают одинаковые значения. Если $x^2 - x = 3x + 5$, то $x^2 - 4x - 5 = 0$, поэтому $x = 5$ или $x = -1$. Если $x^2 - x = 1 - x$, то $x^2 = 1$, т.е. $x = \pm 1$. Наконец, если $3x + 5 = 1 - x$, то $x = -1$.

Далее, легко убедиться в том, что при $x \leq -1$ и при $x \geq 5$ справедливы неравенства $x^2 - x \geq 1 - x$ и $x^2 - x \geq 3x + 5$. Следовательно, $x^2 - x$ является наибольшей из трех данных величин. По условию задачи составим уравнение $x^2 - x = (3x + 5) + (1 - x)$. Тогда $x^2 - 3x - 6 = 0$, поэтому $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{33})$. Решение $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{33})$ — постороннее как не принадлежащее рассматриваемой области изменения x . Так как значение $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{33}) < -1$, оно является решением задачи.

Если $-1 < x < 5$, то справедливы неравенства $3x + 5 > x^2 - x$ и $3x + 5 > 1 - x$, поэтому для всех $x \in (-1, 5)$ величина $3x + 5$ является наибольшей. Составим уравнение $3x + 5 = (x^2 - x) + (1 - x)$, т.е. $x^2 - 5x - 4 = 0$. Решени-

ями последнего уравнения являются $x = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{41})$. Здесь $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{41})$ – постороннее решение, так как $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{41}) > 5$. В то же время второе решение

$$x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{41}) \in (-1, 5).$$

97. $x = 2a, \quad 0 \leq x \leq a(1 - \sqrt{1 + a^2}).$

Решение. Левая часть неравенства определена для всех x , для которых $x^2 - 2ax \geq 0$ и $a^2 - \sqrt{x^2 - 2ax} \geq 0$, т.е. $a(1 + \sqrt{1 + a^2}) \leq x \leq 2a$ или $0 \leq x \leq a(1 - \sqrt{1 + a^2})$.

Если $0 \leq x \leq a(1 - \sqrt{1 + a^2})$, то исходное неравенство справедливо, так как его левая часть неотрицательная, а правая часть $a - x < 0$.

Рассмотрим случай, когда $a(1 + \sqrt{1 + a^2}) \leq x \leq 2a$. Возводя обе части первоначального неравенства в квадрат, получаем равносильное неравенство

$$a^2 - \sqrt{x^2 - 2ax} \geq a^2 - 2ax + x^2,$$

т.е. $2ax - x^2 \geq \sqrt{x^2 - 2ax}$. Но последнее неравенство справедливо только при одновременном выполнении неравенств $2ax - x^2 \geq 0$, $x^2 - 2ax \geq 0$. Следовательно, $x^2 - 2ax = 0$, что приводит к решению $x = 2a$.

98. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, то $x = |a|$, или $-|a|\sqrt{1 + a^2} \leq x \leq -|a|$.

Решение. Левая часть неравенства определена только для тех x , для которых $x^2 - a^2 \geq 0$ и $a^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \geq 0$, поэтому $|a| \leq |x|$ и $a^2 \geq \sqrt{x^2 - a^2}$. Последнее неравенство равносильно неравенству $a^4 \geq x^2 - a^2$, откуда получаем $|x| \leq |a|\sqrt{1 + a^2}$. Таким образом, $|a| \leq |x| \leq |a|\sqrt{1 + a^2}$.

Если $a = 0$, то $x = 0$ и это значение для x удовлетворяет исходному неравенству. В случае, когда $|a| \neq 0$, неравенство справедливо, если $x \leq 0$, что в сравнении с ОДЗ приводит к решению $-|a|\sqrt{1 + a^2} \leq x \leq -|a|$. Если же $x > 0$, то после

возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $a^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \geq x^2$, поэтому $a^2 - x^2 \geq \sqrt{x^2 - a^2}$. Ясно, что в последнем неравенстве $a^2 - x^2 \geq 0$ и одновременно $x^2 - a^2 \geq 0$. Следовательно, $x = |a|$.

99. $a < -3$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $x^2 + ax \geq 0$. Если $a \geq 0$, то $x \leq -a$ или $x \geq 0$. Если $a < 0$, то $x \leq 0$ или $x \geq -a$.

Рассмотрим неравенство $\sqrt{x^2 + ax} \geq x - a$. Легко видеть, что решениями неравенства являются те значения x из ОДЗ, для которых $x < a$. Отметим также, что при $a > 0$ значение $x = 0$ является решением неравенства, поэтому множество решений пересекается с промежутком $[-1, 0]$.

Предположим, что $a \leq 0$. Тогда каждое $x \in (-\infty, a)$ есть решение неравенства, поэтому можно считать, что $a \leq -1$.

Если $x \geq a$ и x лежит в ОДЗ, то имеем равносильные неравенства

$$\sqrt{x^2 + ax} \geq x - a, \quad x^2 + ax \geq x^2 - 2ax + a^2, \quad 3ax \geq a^2,$$

поэтому $x \leq \frac{a}{3}$. Таким образом, $\frac{a}{3} < -1$, т.е. $a < -3$.

100. $a < -1$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $x^2 - 2ax \geq 0$. Если $a \geq 0$, то $x \leq 0$ или $x \geq 2a$. Если $a < 0$, то $x \leq 2a$ или $x \geq 0$.

Рассмотрим неравенство $1 - x < \sqrt{x^2 - 2ax}$. Очевидно, что те x из ОДЗ, для которых $x > 1$, являются решениями последнего неравенства, так как квадратный корень справа всегда принимает неотрицательные значения.

Если $x \leq 1$ и $x^2 - 2ax \geq 0$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства $1 - x < \sqrt{x^2 - 2ax}$ получаем равносильное неравенство $1 - 2x + x^2 < x^2 - 2ax$, т.е. $2(1 - a)x > 1$.

В случае, когда $a < 0$ и $x \in [0, 1]$, из неравенства $2(1 - a)x > 1$ следует, что $x > \frac{1}{2(1-a)}$. Таким образом, по условию задачи получаем неравенство $\frac{1}{2(1-a)} < \frac{1}{4}$, поэтому $2 < 1 - a$ и $a < -1$.

Если же $a \geq 0$, то из ОДЗ нам достаточно рассматривать только те x , для которых $x \geq 2a$, причем уже из условия задачи следует, что необходимо $2a \leq \frac{1}{4}$, т.е. $a \leq \frac{1}{8}$.

Считая, что $0 \leq a \leq \frac{1}{8}$, из неравенства $2(1-a)x > 1$ получаем, что $x > \frac{1}{2(1-a)}$, поэтому необходимо $\frac{1}{2(1-a)} < \frac{1}{4}$, откуда следует, что $a < -1$. Но это невозможно в случае, когда $a \in [0, 1/8]$.

101. Если $a < -1$, то $0 \leq x \leq \frac{1}{2}(-a+1-\sqrt{a^2-2a-3})$ или $x \geq \frac{1}{2}(-a+1+\sqrt{a^2-2a-3})$; если $a \geq -1$, то $x \geq 0$.

Решение. Сначала найдем множество тех x , для которых определены обе части неравенства. Ясно, что должны одновременно выполняться неравенства $x \geq 0$ и $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

Так как для квадратного трехчлена $x^2 + ax + 1$ дискриминант равен $a^2 - 4$, то при $a^2 - 4 \leq 0$, т.е. при $|a| \leq 2$, неравенство $x^2 + ax + 1 \geq 0$ справедливо для любых x , что вместе с условием $x \geq 0$ дает $x \geq 0$.

Если $|a| > 2$, то $x \leq \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ или $x \geq \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$. Если $a > 2$, то $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2} < 0$, поэтому окончательно получаем $x \geq 0$. Если же $a < -2$, то $\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2} > 0$, поэтому $0 \leq x \leq \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ или $x \geq \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

Таким образом, если $a \geq -2$, то $x \geq 0$; если $a < -2$, то, $0 \leq x \leq \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ или $x \geq \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

Далее, для всех x из ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 + ax + 1 \geq x$, т.е. $x^2 + (a-1)x + 1 \geq 0$.

Последнее неравенство справедливо для любых x , если $-1 \leq a \leq 3$, и в этом случае получаем решение $x \geq 0$. Для остальных a имеем

$$x \leq \frac{-a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2}$$

или

$$x \geq \frac{-a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2}.$$

Если $a > 3$, то $\frac{-a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2} \leq 0$, поэтому снова получаем $x \geq 0$. Если $a < -1$, то $\frac{-a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2} > 0$, поэтому для $a \in [-2, -1)$

$$0 \leq x \leq \frac{-a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2}$$

или

$$x \geq \frac{-a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2}.$$

Наконец, для $a < -2$ легко проверить, что

$$\frac{-a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2} \geq \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$$

и

$$\frac{-a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2} \leq \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Следовательно, при $a < -2$ первоначальное неравенство справедливо только для тех x , для которых

$$0 \leq x \leq \frac{-a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2}$$

или

$$x \geq \frac{-a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2}.$$

102. 1) Если $a < 1$, то $x \leq a - 1$ или $0 \leq x \leq 1$,
 2) если $1 \leq a \leq 2$, то $a - 1 \leq x \leq 1$ или $x \leq 0$,
 3) если $a > 2$, то $x \leq 0$.

Решение. Сначала найдем область допустимых значений неравенства. Очевидно, что обе части неравенства определены для всех x , для которых одновременно выполняются

неравенства $x^2 - ax + 1 \geq 0$ и $1 - x \geq 0$. Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - ax + 1$ равен $a^2 - 4$, при $|a| \leq 2$ неравенство $x^2 - ax + 1 \geq 0$ справедливо для любых x . Это вместе с условием $1 - x \geq 0$ дает $x \leq 1$. Если же $|a| > 2$, то $x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ или $x \geq \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Если $a > 2$, то $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > \frac{a}{2} > 1$, а неравенство $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 1$ равносильно следующим неравенствам: $a - 2 < \sqrt{a^2 - 4}$, $a^2 - 4a + 4 < a^2 - 4$, $-4a < -8$, $a > 2$. Следовательно, если $a > 2$, то $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 1$ и $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 1$, откуда получаем $x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Если же $a < -2$, то $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \frac{-|a| + \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 0$, поэтому $x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ или $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \leq x \leq 1$.

Таким образом, 1) если $a < -2$, то $x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ или $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \leq x \leq 1$, 2) если $-2 \leq a \leq 2$, то $x \leq 1$, 3) если $a > 2$, то $x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Далее, если x принадлежит ОДЗ, то из данного неравенства получаем равносильное неравенство $x^2 - ax + 1 \geq 1 - x$, т.е. $x^2 + (1 - a)x \geq 0$. Отсюда следует, что $x \leq a - 1$ или $x \geq 0$, если $a < 1$, и $x \leq 0$ или $x \geq a - 1$, если $a \geq 1$. Дальнейшей задачей является выделение тех x из найденного множества, которые содержатся в ОДЗ.

Пусть $a > 2$. Тогда $a - 1 > 0$, поэтому $x \geq a - 1$ или $x \leq 0$. Сравнивая с ОДЗ и отмечая, что $0 \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < a - 1$, получаем $x \leq 0$.

Теперь предположим, что $a < -2$. Тогда $x \geq 0$ или $x \leq a - 1$. Отметим, что $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 0$, поэтому неравенства $x \geq 0$ и $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \leq x \leq 1$ дают $0 \leq x \leq 1$. Кроме того, $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} > a - 1$, поэтому из неравенств $x \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ и $x \leq a - 1$ имеем $x \leq a - 1$.

Наконец, проанализируем случай, когда $-2 \leq a \leq 2$. Если дополнительно $a \geq 1$, то $a - 1 \geq 0$, поэтому $x \geq a - 1$ или $x \leq 0$. Если же $a < 1$, то $a - 1 < 0$, поэтому $x \geq 0$ или $x \leq a - 1$. В данном случае следует рассмотреть только те x , для которых $x \leq 1$.

Отметим также, что для $a < -2$ и для $-2 \leq a < 1$ имеем решение $x \leq a - 1$ или $0 \leq x \leq 1$, поэтому в ответе эти случаи можно объединить.

103. 1) Если $a = 0$, то неравенство не имеет решений;

2) если $a > 0$, то $\frac{24-5\sqrt{5}}{11}a < x < \frac{24+5\sqrt{5}}{11}a$;

3) если $a < 0$, то $|a| \leq x < \frac{8+5\sqrt{5}}{3}|a|$.

Решение. Обе части неравенства определены при $x - a > 0$, $x^2 - a^2 \geq 0$, $x \geq \sqrt{x^2 - a^2}$, т.е. $x > a$, $|x| \geq |a|$, $x \geq \sqrt{x^2 - a^2}$. Но при $x \geq |a|$ неравенство $x \geq \sqrt{x^2 - a^2}$ справедливо. Следовательно, ОДЗ состоит из всех x , для которых $x > a$ и $x \geq |a|$, т.е. $x > a$ для $a \geq 0$ и $x \geq |a|$ для $a < 0$.

Так как $(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})^2 = 2(x - \sqrt{x^2 - a^2})$, неравенство можно записать в следующем виде:

$$|\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}| > \frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a \geq 0$. Тогда для $x > a$ имеем неравенство

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} > \frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}.$$

Разделив обе части неравенства на $\sqrt{x+a}$, для новой переменной $y = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ получим неравенство $1 - \frac{1}{y} > \frac{y}{5}$, поэтому $y^2 - 5y + 5 < 0$. Следовательно, $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < y < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, откуда легко получить неравенство

$$\frac{15-5\sqrt{5}}{2} < \frac{x+a}{x-a} < \frac{15+5\sqrt{5}}{2},$$

поэтому $\frac{17+5\sqrt{5}}{13+5\sqrt{5}}a < x < \frac{17-5\sqrt{5}}{13-5\sqrt{5}}a$, что после освобождения от иррациональности в знаменателе можно записать в виде

$$\frac{24-5\sqrt{5}}{11}a < x < \frac{24+5\sqrt{5}}{11}a.$$

Это есть решение неравенства в случае, когда $a > 0$. Если $a = 0$, то непосредственно убеждаемся в том, что неравенство не имеет решений.

2) Пусть $a < 0$. Тогда при $x = |a| = -a$ первоначальное неравенство справедливо. При $x > |a|$ получаем неравенство $\frac{1}{y} - 1 > \frac{y}{5}$, т.е. $y^2 + 5y - 5 < 0$, поэтому $-\frac{5+\sqrt{45}}{2} < y < \frac{-5+\sqrt{45}}{2}$. В результате получаем

$$\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} < \frac{3\sqrt{5}-5}{2}, \quad \frac{x+a}{x-a} < \frac{35-15\sqrt{5}}{2}$$

и

$$x < \frac{37-15\sqrt{5}}{33-15\sqrt{5}}a = -\frac{8+5\sqrt{5}}{3}a = \frac{8+5\sqrt{5}}{3}|a|.$$

Учитывая, что $x \geq |a|$, окончательно в этом случае имеем решение первоначального неравенства $|a| \leq x < \frac{8+5\sqrt{5}}{3}|a|$.

104. Если $a < 0$, то $x > a$; если $a \geq 0$, то $x > \frac{8-\sqrt{13}}{3}a$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x , для которых $x^2 - a^2 \geq 0$, т.е. $|x| \geq |a|$. Полезно также отметить, что в неравенстве слева стоит неотрицательная величина, поэтому выражение справа должно быть положительным, т.е. $x - a > 0$.

Разделив обе части неравенства на $x - a$, получаем для новой переменной $y = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ неравенство $|y^2 - y| < 3$, т.е. $-3 < y^2 - y < 3$. Неравенство $y^2 - y > -3$ выполняется для любого y , так как квадратный трехчлен $y^2 - y + 3$ имеет отрицательный дискриминант. Второе неравенство $y^2 - y < 3$, т.е. $y^2 - y - 3 < 0$, имеет решение $\frac{1-\sqrt{13}}{2} <$

$< y < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, поэтому $\frac{x+a}{x-a} < \frac{7+\sqrt{13}}{2}$. Отсюда легко получить, что $x > \frac{9+\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}}a = \frac{8-\sqrt{13}}{3}a$. Сравнивая с ОДЗ, для $a < 0$ имеем решение первоначального неравенства $x > a$, а для $a \geq 0$ – решение $x > \frac{8-\sqrt{13}}{3}a$, так как $\frac{8-\sqrt{13}}{3} > 1$.

105. 1) Если $a > 1$, то $0 < x < \log_a \frac{2a}{a+1}$ или $x > 1$;

2) если $0 < a < 1$, то $x < 0$ или $\log_a \frac{2a}{a+1} < x < 1$.

Решение. Пусть $t = a^x$. Тогда имеем неравенство $\frac{1}{t-1} > \frac{a}{a-t}$, поэтому $\frac{(1+a)t-2a}{(t-1)(t-a)} > 0$. Если обозначить $t_0 = \frac{2a}{1+a}$, то неравенство можно записать в виде $\frac{t-t_0}{(t-1)(t-a)} > 0$, так как $a > 0$ и $a \neq 1$, поэтому при делении на положительную величину $1+a$ знак неравенства сохраняется.

Рассмотрим теперь два случая. Сначала предположим, что $a > 1$. Тогда $1 < t_0 < a$. Следовательно, $1 < t < t_0$ или $t > a$, т.е. $0 < x < \log_a \frac{2a}{a+1}$ или $x > 1$.

Если же $0 < a < 1$, то $a < t_0 < 1$, поэтому $a < t < t_0$ или $t > 1$. В результате получаем $1 > x > \log_a \frac{2a}{a+1}$ или $x < 0$.

106. 1) Если $a > 1$, то $x < -1$ или $\log_a \frac{a+1}{2a} < x < 0$;

2) если $0 < a < 1$, то $-1 < x < \log_a \frac{a+1}{2a}$ или $x > 0$.

Решение. Обозначая $t = a^x$, для новой переменной t получаем неравенство $\frac{1}{1-t} > \frac{a}{at-1}$, т.е. $\frac{2at-(1+a)}{(at-1)(t-1)} < 0$. Следовательно, $\frac{t-t_0}{(t-\frac{1}{a})(t-1)} < 0$, где $t_0 = \frac{a+1}{2a}$.

Предположим, что $a > 1$. Тогда $\frac{1}{a} < t_0 < 1$, поэтому последнее неравенство имеет решения $t < \frac{1}{a}$ или $t_0 < t < 1$, что дает нам решения первоначального неравенства: $x < \log_a \frac{1}{a} = -1$ или $\log_a \frac{a+1}{2a} < x < 0$.

Наконец, в случае, когда $0 < a < 1$, справедливо неравенство $1 < t_0 < \frac{1}{a}$, поэтому получаем $t < 1$ или $t_0 < t < \frac{1}{a}$, т.е. $x > 0$ или $-1 < x < \log_a \frac{a+1}{2a}$.

107. 1) Если $a > 1$, то $1 < x < \frac{1}{2}(2 + a + \sqrt{4a + a^2})$;

2) если $0 < a < 1$, то $x > \frac{1}{2}(2 + a + \sqrt{4a + a^2})$.

Решение. Обе части неравенства определены при $x > 1$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Если $a > 1$, то из данного неравенства получаем неравенство $\frac{(x-1)^2}{x} < a$, поэтому $x^2 - (2+a)x + 1 < 0$. Следовательно,

$$\frac{2 + a - \sqrt{4a + a^2}}{2} < x < \frac{2 + a + \sqrt{4a + a^2}}{2}.$$

Так как $\frac{2+a-\sqrt{4a+a^2}}{2} < 1$ и $x > 1$, то находим решение исходного неравенства $1 < x < \frac{2+a+\sqrt{4a+a^2}}{2}$.

Если $0 < a < 1$, то $x^2 - (2+a)x + 1 > 0$, поэтому

$$x < \frac{2 + a - \sqrt{4a + a^2}}{2} \quad \text{или} \quad x > \frac{2 + a + \sqrt{4a + a^2}}{2}.$$

Учитывая, что $x > 1$, получаем решение $x > \frac{2+a+\sqrt{4a+a^2}}{2}$.

108. 1) Если $0 < a < 1$, то $1 < x < \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$,

2) если $a > 1$, то $x > \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.

Решение. Область допустимых значений неравенства: $x > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Неравенство можно записать в виде $\log_a(x-1)x > 2$, поэтому $(x-1)x > a^2$ ($a > 1$) или $(x-1)x < a^2$ ($0 < a < 1$).

Если $a > 1$, то получаем квадратное неравенство $x^2 - x - a^2 > 0$, поэтому $x < \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$ или $x > \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. Так как $\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2} < 0$ и $x > 1$, то имеем решение первоначального неравенства: $x > \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.

Если $0 < a < 1$, то получаем квадратное неравенство $x^2 - x - a^2 < 0$, поэтому $\frac{1 - \sqrt{1+4a^2}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1+4a^2}}{2}$. Так как $\frac{1 + \sqrt{1+4a^2}}{2} > 1$ и $x > 1$, то $1 < x < \frac{1 + \sqrt{1+4a^2}}{2}$.

109. Если $a > 1$, то $0 < x < \frac{1}{a^2}$; если $0 < a < 1$, то $x > \frac{1}{a^2}$.

Решение. Очевидно, что необходимо наложить условия $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$. Кроме того, величина, стоящая под знаком квадратного корня, должна быть неотрицательной:

$$\begin{aligned} \log_x a^3 + 3 &= 3(\log_x a + 1) = 3 \left(\frac{1}{\log_a x} + 1 \right) = \\ &= 3 \frac{1 + \log_a x}{\log_a x} \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\log_a x > 0$ или $\log_a x \leq -1$, поэтому:
1) если $a > 1$, то $x > 1$ или $0 < x < \frac{1}{a}$; 2) если $0 < a < 1$, то $0 < x < 1$ или $x \geq \frac{1}{a}$.

Введем новую переменную $t = \log_a x$. Тогда имеем неравенство

$$\sqrt{3 \frac{1+t}{t}} \cdot t < -\sqrt{6}.$$

Из неравенства видно, что $t < 0$. Следовательно, после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство $3 \frac{1+t}{t} \cdot t^2 > 6$, поэтому $t < 0$ и $(t+1)t > 2$. Но последнее неравенство можно записать в виде $t^2 + t - 2 > 0$, поэтому $t < -2$ или $t > 0$. Учитывая, что $t < 0$, имеем $t < -2$.

Таким образом, $\log_a x < -2$. В результате получаем решение $0 < x < 1/a^2$, если $a > 1$, и решение $x > 1/a^2$, если $0 < a < 1$.

110. Если $a > 1$, то $\frac{1}{a^2} < x < 1$ или $x \geq a$; если $0 < a < 1$, то $0 < x \leq a$ или $1 < x < \frac{1}{a^2}$.

Решение. Ясно, что a и x должны удовлетворять условиям $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того, отметим, что $2 - \log_x a^2 = 2 \left(1 - \frac{1}{\log_a x}\right) \doteq 2 \left(1 - \frac{1}{t}\right)$, где $t = \log_a x$. Следовательно, неравенство можно записать в виде $\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{t}\right)} \cdot t > -\sqrt{12}$, т.е. $\sqrt{\frac{t-1}{t}} \cdot t > -\sqrt{6}$. Здесь величина под знаком квадратного корня должна быть неотрицательной, поэтому $t \geq 1$ или $t < 0$.

Если $t \geq 1$, то неравенство $\sqrt{\frac{t-1}{t}} \cdot t > -\sqrt{6}$ справедливо, что приводит к решению $x \geq a$, если $a > 1$, и $0 < x \leq a$, если $0 < a < 1$.

Если $t < 0$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $\frac{t-1}{t} \cdot t^2 < 6$, поэтому $t^2 - t - 6 < 0$ и $-2 < t < 3$. Это дает решение $-2 < t < 0$, т.е. $-2 < \log_a x < 0$. Следовательно, если $a > 1$, то $1/a^2 < x < 1$; если же $0 < a < 1$, то $1 < x < 1/a^2$.

$$111. 0 < x < \frac{1}{8}.$$

Решение. Ясно, что $x > 0$, $x \neq 1$. В то же время из неравенства следует $\log_2 x < 0$, поэтому можно ограничиться случаем, когда $0 < x < 1$. Кроме того, необходимо $\log_x 4 + 2 = 2 \left(\frac{1}{\log_2 x} + 1\right) \geq 0$, т.е. $\frac{1}{\log_2 x} \geq -1$, поэтому $\log_2 x \leq -1$ и $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Для новой переменной $z = \log_2 x$ имеем неравенство

$$\sqrt{2 \left(\frac{1}{z} + 1\right)} \cdot z < -2\sqrt{3},$$

т.е. $\sqrt{\frac{1}{z} + 1} \cdot z < -\sqrt{6}$, откуда получаем $\left(\frac{1}{z} + 1\right) z^2 > 6$.

Таким образом, $z^2 + z - 6 > 0$, поэтому $z < -3$ или $z > 2$, что приводит к неравенству $z < -3$, так как $z \leq -1$. В результате имеем $\log_2 x < -3$, поэтому $x < \frac{1}{8}$.

112. $\frac{1}{9} < x \leq \frac{1}{3}$ или $x > 1$.

Решение. Ясно, что $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того, $2 + \log_x 9 = 2(1 + \log_x 3) = 2\left(1 + \frac{1}{\log_3 x}\right) \geq 0$, поэтому $\log_3 x > 0$ или $\log_3 x \leq -1$, т.е. $x > 1$ или $0 < x \leq \frac{1}{3}$.

Запишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{\log_3 x}\right)} \cdot \log_3 x > -2.$$

Если $x > 1$, то $\log_3 x > 0$, поэтому последнее неравенство выполняется.

Далее, предположим, что $0 < x \leq \frac{1}{3}$, и введем новую переменную $z = \log_3 x$. Тогда получим неравенство $\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{z}\right)} \times z > -2$, откуда после возведения в квадрат обеих частей имеем $2(1 + 1/z)z^2 < 4$, т.е. $z^2 + z - 2 < 0$. Таким образом, $-2 < z < 1$, что вместе с условием $z = \log_3 x \leq -1$ дает решение квадратного неравенства $-2 < z \leq -1$. Следовательно, $\frac{1}{9} < x \leq \frac{1}{3}$.

113. Если $a > 1$, то $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} \leq x < a^2$; если $0 < a < 1$, то $a^2 < x \leq \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$.

Решение. Для новой переменной $z = \log_a x$ неравенство можно записать в виде $\sqrt{3} \cdot z < \sqrt{5z + 2}$. Очевидно, что $5z + 2 \geq 0$, т.е. $z \geq -\frac{2}{5}$.

Если $-\frac{2}{5} \leq z < 0$, то неравенство справедливо. Если $z \geq 0$, то приходим к равносильному неравенству $3z^2 < 5z + 2$, т.е. $3z^2 - 5z - 2 < 0$. Следовательно, $-\frac{1}{3} < z < 2$. Так как $z \geq 0$, получаем $0 \leq z < 2$.

Таким образом, $-\frac{2}{5} \leq z < 2$, поэтому $-\frac{2}{5} \leq \log_a x < 2$.

Окончательно имеем: если $a > 1$, то $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} \leq x < a^2$; если $0 < a < 1$, то $a^2 < x \leq \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$.

114. Если $a > 1$, то $x > a^3$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^3$.

Решение. Учитывая, что $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$, для новой переменной $z = \log_a x$ данное неравенство можно записать в виде

$$z > \sqrt{\frac{6z}{z-1}}.$$

Очевидно, что $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того, в последнем неравенстве величина, стоящая справа под знаком квадратного корня, должна быть неотрицательной, поэтому $z \leq 0$ или $z > 1$. В то же время $z \leq 0$ не удовлетворяет неравенству, так как квадратный корень справа принимает только неотрицательные значения. Следовательно, мы должны ограничиться рассмотрением случая $z > 1$.

Если $z > 1$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем равносильное неравенство $z^2 > \frac{6z}{z-1}$, поэтому $z(z-1) > 6$, что дает квадратное неравенство $z^2 - z - 6 > 0$.

Следовательно, $z > 3$ или $z < -2$. Так как $z > 1$, имеем решение $z > 3$, откуда получаем $x > a^3$, если $a > 1$, и $0 < x < a^3$, если $0 < a < 1$.

115. $\frac{1}{2} < x \leq \sqrt[5]{16}$ или $1 < x \leq 8$.

Решение. Неравенство можно записать в виде

$$\frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{3}{\log_2 x} \geq \frac{5}{4}.$$

Ясно, что ОДЗ неравенства состоит из всех x , для которых $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$.

Пусть $z = \log_2 x$. Тогда имеем неравенство $\frac{1}{1+z} + \frac{3}{z} \geq \frac{5}{4}$, поэтому $\frac{4z+3}{z(z+1)} \geq \frac{5}{4}$.

Если $0 < x < \frac{1}{2}$ или $x > 1$, то $z < -1$ или $z > 0$, поэтому $z(z+1) > 0$. Следовательно, в этом случае неравенство можно преобразовать в неравенство $4(4z+3) \geq 5z(z+1)$,

откуда получаем квадратное неравенство $5z^2 - 11z - 12 \leq 0$. Таким образом, $-\frac{4}{5} \leq z \leq 3$, поэтому $0 < z \leq 3$ и $1 < x \leq 8$.

Если $\frac{1}{2} < x < 1$, то $-1 < z < 0$ и $z(z+1) < 0$, поэтому получаем неравенство $5z^2 - 11z - 12 \geq 0$. Следовательно, $z \leq -\frac{4}{5}$ или $z \geq 3$, откуда $-1 < z \leq -\frac{4}{5}$ и $\frac{1}{2} < x \leq 1/\sqrt[5]{16}$.

116. $1 < x \leq \sqrt{2}$ или $\sqrt[4]{8} \leq x < 2$.

Решение. Неравенство можно записать в виде

$$\frac{5}{2 \log_2 x} \geq \frac{1}{\log_2 x - 1} + 7.$$

Область допустимых значений данного неравенства состоит из тех x , для которых $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$.

Для новой переменной $z = \log_2 x$ имеем неравенство $\frac{5}{2z} \geq \frac{1}{z-1} + 7$, откуда в результате несложных преобразований получаем неравенство $\frac{14z^2 - 17z + 5}{2z(z-1)} \leq 0$.

Если $1 < x < 2$, то $0 < z < 1$ и $z(z-1) < 0$, поэтому $14z^2 - 17z + 5 \geq 0$, откуда $z \leq \frac{1}{2}$ или $z \geq 3/4$. Учитывая, что $0 < z < 1$, имеем $0 < z \leq \frac{1}{2}$ или $3/4 \leq z < 1$, поэтому $1 < x \leq \sqrt{2}$ или $\sqrt[4]{8} \leq x < 2$.

Если $0 < x < 1$ или $x > 2$, то $z < 0$ или $z > 1$, поэтому $z(z-1) > 0$ и, следовательно, $14z^2 - 17z + 5 \leq 0$. Но тогда $\frac{1}{2} \leq z \leq 3/4$, и в этом случае неравенство не имеет решений.

117. Если $a > 1$, то $a < x < a^5$; если $0 < a < 1$, то $a^5 < x < a$.

Решение. Отметим, что $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Кроме того, так как $0,4 = 2/5$ и $6,25 = 25/4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, для новой переменной $z = \log_a x$ неравенство можно записать в виде

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{z^2+1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-3z)}.$$

Следовательно, $z^2 + 1 < -2(2-3z)$, поэтому $z^2 - 6z + 5 < 0$. Последнее неравенство имеет решение $1 < z < 5$.

Таким образом, $1 < \log_a x < 5$, т.е. $a < x < a^5$, если $a > 1$, и $a^5 < x < a$, если $0 < a < 1$.

118. Если $a > 1$, то $0 < x < \frac{1}{a^2}$ или $x > a^3$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^3$ или $x > \frac{1}{a^2}$.

Решение. Отметим, что $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Кроме того, так как $0,8 = 4/5$ и $1,25 = 5/4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$, для новой переменной $z = \log_a x$ неравенство можно записать в виде

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{z^2-2z} < \left(\frac{4}{5}\right)^{-(z-6)}.$$

Следовательно, $z^2 - 2z > 6 - z$, поэтому $z^2 - z - 6 > 0$, т.е. $z < -2$ или $z > 3$.

В результате получаем $\log_a x < -2$ или $\log_a x > 3$, поэтому $0 < x < \frac{1}{a^2}$ или $x > a^3$, если $a > 1$, и $x > \frac{1}{a^2}$ или $0 < x < a^3$, если $0 < a < 1$.

119. $x > 1$.

Решение. Введем новую переменную $z = 3^x$ и отметим, что $z > 0$. Рассмотрим два случая.

1) Предположим сначала, что $0 < z < 1$. В этом случае необходимо ограничиться только такими z , для которых $\frac{3}{z} - \frac{24}{1-z} \geq 0$ и $9 - \frac{8}{1-z} \geq 0$, т.е. $3(1-z) \geq 24z$ и $9(1-z) \geq 8$. Следовательно, $z \leq 1/9$.

Если $0 < z \leq 1/9$, то после возведения обеих частей неравенства в квадрат получаем равносильное неравенство

$$\frac{3}{z} - \frac{24}{1-z} < 9 - \frac{8}{1-z}.$$

Умножая на $z(1-z) > 0$, имеем $3(1-z) - 24z < 9z(1-z) - 8z$, $3 - 3z - 24z < 9z - 9z^2 - 8z$, $9z^2 - 28z + 3 < 0$.

В последнем неравенстве корни квадратного трехчлена

$$z = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 27}}{9} = \frac{14 \pm \sqrt{169}}{9} = \frac{14 \pm 13}{9},$$

$$z_1 = 3 \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{1}{9},$$

поэтому из неравенства получаем $\frac{1}{9} < z < 3$, что вместе с условием $0 < z \leq 1/9$ приводит к пустому множеству решений.

2) Пусть $z > 1$. В данном случае необходимо ограничиться такими z , для которых $\frac{3}{z} - \frac{24}{1-z} \geq 0$ и $9 - \frac{8}{1-z} \geq 0$, т.е. $3(1-z) \leq 24z$ и $9(1-z) \leq 8$, поэтому $z \geq 1/9$. Учитывая условие $z > 1$, получаем решение $z > 1$.

Далее, аналогичные преобразования дают неравенство $9z^2 - 28z + 3 > 0$, откуда $z < 1/9$ или $z > 3$, что вместе с условием $z > 1$ дает $z > 3$.

Таким образом, $z = 3^x > 3$, т.е. $x > 1$.

$$120. \quad -3 < x \leq -2 \quad \text{или} \quad x > 2.$$

Решение. Для новой переменной $z = 2^x$ имеем неравенство

$$\sqrt{\frac{4}{z} - \frac{12}{1-z}} < \sqrt{8 + \frac{9}{1-z}}.$$

Очевидно, что здесь $z > 0$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $0 < z < 1$. Необходимо ограничиться только такими z , для которых $\frac{4}{z} - \frac{12}{1-z} \geq 0$ и $8 + \frac{9}{1-z} \geq 0$, т.е. $4(1-z) \geq 12z$ и $8(1-z) + 9 \geq 0$, откуда получаем $z \leq \frac{1}{4}$.

Далее, если $0 < z \leq \frac{1}{4}$, то после возведения обеих частей неравенства в квадрат получаем равносильное неравенство

$$\frac{4}{z} - \frac{12}{1-z} < 8 + \frac{9}{1-z}.$$

Умножая на $z(1-z) > 0$, имеем $4(1-z) - 12z < 8z(1-z) + 9z$, $4 - 4z - 12z < 8z - 8z^2 + 9z$, $8z^2 - 33z + 4 < 0$.

$$z = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 128}}{16} = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{16} = \frac{33 \pm 31}{16},$$

$$z_1 = 4 \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, $1/8 < z < 4$, что вместе с условием $0 < z \leq \frac{1}{4}$ дает $1/8 < z \leq \frac{1}{4}$, откуда $-3 < x \leq -2$.

2) Предположим, что $z > 1$. Здесь также необходимо ограничиться случаем, когда $\frac{4}{z} - \frac{12}{1-z} \geq 0$ и $8 + \frac{9}{1-z} \geq 0$, поэтому $8 \geq \frac{9}{z-1}$, $8z \geq 17$, $z \geq 17/8$.

Наконец, аналогичные преобразования приводят к неравенству $8z^2 - 33z + 4 > 0$, откуда получаем $z < 1/8$ или $z > 4$, что с учетом $z \geq 17/8$ дает $z > 4$, т.е. $x > 2$.

121. Если $a > 1$, то $0 < x < \frac{1}{a^4}$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^8$.

Решение. Так как $\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{32+4\log_a x}$, неравенство можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{32+4\log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x},$$

поэтому $32 + 4\log_a x < \log_a^2 x$. Таким образом, для новой переменной $z = \log_a x$ имеем квадратное неравенство $z^2 - 4z - 32 > 0$, т.е. $z > 8$ или $z < -4$.

Если $a > 1$, то из неравенства $\log_a x > 8$ следует, что $x > a^8$, а из неравенства $\log_a x < -4$ имеем $x < 1/a^4$. Остается выбрать только те решения, которые лежат в интервале $(0, 1)$. В результате получаем интервал $(0, 1/a^4)$.

Если же $0 < a < 1$, то из неравенства $\log_a x > 8$ вытекает, что $0 < x < a^8$, а неравенство $\log_a x < -4$ дает $x > 1/a^4$. Выбирая решения из $(0, 1)$, получаем интервал $(0, a^8)$.

122. Если $a > 1$, то $a < x < a^4$; если $0 < a < 1$, то искомое подмножество пустое.

Решение. Для новой переменной $z = \log_a x$ неравенство имеет вид $\lg(3z - z^2 + 4) > \lg(8 - 2z)$. Обе части этого неравенства определены только для тех z , для которых $3z - z^2 + 4 > 0$ и $8 - 2z > 0$. Первое неравенство имеет решение $-1 < z < 4$, а второе — решение $z < 4$. Следовательно, $-1 < z < 4$.

Так как десятичный логарифм является строго возрастающей функцией, из неравенства следует, что $3z - z^2 + 4 > 8 - 2z$, поэтому $z^2 - 5z + 4 < 0$. Следовательно, $1 < z < 4$, причем все $z \in (1, 4)$ содержатся в ОДЗ исходного неравенства, записанного для новой переменной z .

Таким образом, $1 < \log_a x < 4$, поэтому $a < x < a^4$, если $a > 1$, и $a > x > a^4$, если $0 < a < 1$. Полученное решение мы должны пересечь с интервалом $(1, +\infty)$. В результате находим $a < x < a^4$, если $a > 1$; при $a \in (0, 1)$ решения отсутствуют.

123. $a < -3$ или $a > 1$.

Решение. Так как $0,4 = 2/5$ и $6,25 = 25/4 = (2/5)^{-2}$, первое неравенство можно записать следующим образом:

$$(2/5)^{x^2+1} \geq (2/5)^{-2(a-3x)},$$

откуда получаем $x^2 + 1 \leq -2(a - 3x)$, т.е. $x^2 - 6x + (1 + 2a) \leq 0$.

Следовательно, $3 - \sqrt{8 - 2a} \leq x \leq 3 + \sqrt{8 - 2a}$, если $a \leq 4$. При $a > 4$ дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, поэтому неравенство не имеет решений.

В то же время неравенство $x^2 - 6x + 4 < a^2$ имеет решения

$$3 - \sqrt{5 + a^2} < x < 3 + \sqrt{5 + a^2},$$

поэтому при $a \leq 4$ получаем условие

$$[3 - \sqrt{8 - 2a}, 3 + \sqrt{8 - 2a}] \subset (3 - \sqrt{5 + a^2}, 3 + \sqrt{5 + a^2}),$$

что возможно только при $\sqrt{5 + a^2} > \sqrt{8 - 2a}$.

Возводя обе части последнего неравенства в квадрат, получаем неравенство $5 + a^2 > 8 - 2a$, т.е. $a^2 + 2a - 3 > 0$, откуда $a < -3$ или $a > 1$. С учетом условия $a \leq 4$ имеем $a < -3$ или $1 < a \leq 4$.

Наконец, отметим, что при $a > 4$ множество решений первого неравенства является пустым множеством, поэтому оно содержится в любом множестве, в частности в множестве решений второго неравенства.

124. $a \leq -1$ или $a \geq 0$.

Решение. Так как $0,8 = 4/5$ и $1,25 = 5/4 = (4/5)^{-1}$, второе неравенство можно записать в виде

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2-2x} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{-(a+x)},$$

поэтому получаем неравенство $x^2 - 2x \geq -(a+x)$, т.е. $x^2 - x + a \geq 0$.

Следовательно, $x \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4a})$ или $x \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4a})$, если $a \leq \frac{1}{4}$; при $a > \frac{1}{4}$ неравенство справедливо для любых x .

Вместе с тем первое неравенство $x^2 \geq x + a^2$, т.е. $x^2 - x - a^2 \geq 0$, имеет решение $x \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4a^2})$ или $x \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a^2})$. В результате получаем условия $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4a^2}) \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4a})$ и $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4a}) \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a^2})$, т.е. $\sqrt{1-4a} \leq \sqrt{1+4a^2}$.

После возведения в квадрат обеих частей последнего неравенства имеем $1 - 4a \leq 1 + 4a^2$, поэтому $a^2 + a \geq 0$, откуда $a \leq -1$ или $a \geq 0$. Поскольку $a \leq \frac{1}{4}$, имеем решение $a \leq -1$ или $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$.

Наконец, полученное при $a \leq \frac{1}{4}$ решение необходимо объединить с интервалом $(1/4, +\infty)$, так как при $a > 1/4$ решением второго неравенства является множество все действительных чисел, которое содержит любое числовое множество; в частности, оно содержит множество тех x , которые удовлетворяют первому неравенству.

$$125. a < \sqrt{2}.$$

Решение. Потенцируя, мы получаем неравенство $x^2 + ax + 1 > \frac{1}{2}$, т.е. $x^2 + ax + \frac{1}{2} > 0$. Здесь дискриминант квадратного трехчлена равен $a^2 - 2$. Рассмотрим три случая.

Если $a^2 - 2 < 0$, т.е. $|a| < \sqrt{2}$, то неравенство $x^2 + ax + \frac{1}{2} > 0$ справедливо для всех x , поэтому оно справедливо и для всех отрицательных x .

Если $a^2 - 2 = 0$, т.е. $a = \pm\sqrt{2}$, то $x^2 + ax + \frac{1}{2} = (x \pm 1/\sqrt{2})^2 > 0$ для всех x , кроме $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Следовательно, в этом случае необходимо исключить $a = +\sqrt{2}$.

Если $a^2 - 2 > 0$, т.е. $|a| > \sqrt{2}$, то $x^2 + ax + \frac{1}{2} > 0$ для всех $x < 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 2}) \geq 0$, что дает $a < -\sqrt{2}$. Таким образом, объединяя полученные результаты, имеем $a < \sqrt{2}$.

$$126. a \geq 2.$$

Решение. Потенцируя, мы получаем неравенство $x^2 + 2x + a > 2$, т.е. $x^2 + 2x + (a - 2) > 0$. Здесь дискриминант квадратного трехчлена равен $4 - 4(a - 2) = 4(3 - a)$. Рассмотрим три случая.

Если $4(3 - a) < 0$, т.е. $a > 3$, то неравенство $x^2 + 2x + (a - 2) > 0$ справедливо для всех x , поэтому оно справедливо и для всех положительных x .

Если $a = 3$, то $x^2 + 2x + (a - 2) = (x + 1)^2 > 0$ для всех $x > 0$.

Наконец, если $a < 3$, то неравенство $x^2 + 2x + (a - 2) > 0$ выполняется для $x > -1 + \sqrt{3 - a}$ или $x < -1 - \sqrt{3 - a}$. Следовательно, здесь необходимо рассмотреть те a , для которых $-1 + \sqrt{3 - a} \leq 0$, т.е. $a \geq 2$, поэтому $2 \leq a < 3$. Таким образом, объединяя полученные результаты, получаем $a \geq 2$.

$$127. a > 1.$$

Решение. Очевидно, что $a > 0$, $a \neq 1$. Кроме того, отметим, что $x^2 + x + 1 > 0$ для любых x .

Рассмотрим два случая. Сначала предположим, что $0 < a < 1$. Тогда имеем неравенство $x^2 + x + 1 < 1/a$, т.е.

$x^2 + x + (1 - 1/a) < 0$. Это неравенство не может выполняться одновременно для всех $x > 0$. Например, оно не выполняется для всех достаточно больших положительных x .

Пусть $a > 1$. Так как дискриминант квадратного трехчлена равен $1 - 4(1 - 1/a) = 4/a - 3$, неравенство $x^2 + x + (1 - 1/a) > 0$ справедливо для всех x , если $4/a - 3 < 0$, т.е. $a > 4/3$. В частности, в этом случае неравенство справедливо и для всех $x > 0$.

Далее, если $1 < a \leq \frac{4}{3}$, то наибольший корень квадратного трехчлена равен $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{\frac{4}{a} - 3})$, причем $-1 + \sqrt{\frac{4}{a} - 3} < 0$, так как последнее неравенство равносильно неравенствам $\sqrt{\frac{4}{a} - 3} < 1$, $\frac{4}{a} - 3 < 1$ и $4/a < 4$, а неравенство $\frac{4}{a} < 4$ справедливо при $a > 1$. Следовательно, неравенство $x^2 + x + (1 - 1/a) > 0$ выполняется при

$$x > \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4/a - 3}),$$

поэтому оно выполняется для всех $x > 0$.

128. $0 < a < 1$.

Решение. Ясно, что $a > 0$, $a \neq 1$. Кроме того, $x^2 - x + 1 > 0$ для любых x .

Сначала считаем, что $0 < a < 1$. Тогда имеем неравенство $x^2 - x + 1 > a^2$, т.е. $x^2 - x + (1 - a^2) > 0$. Дискриминант квадратного трехчлена слева равен $1 - 4(1 - a^2) = 4a^2 - 3$. Следовательно, если $4a^2 - 3 < 0$, т.е. $|a| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, то неравенство справедливо для любых x , поэтому оно справедливо и для всех отрицательных x .

Если $a = +\frac{\sqrt{3}}{2} \in (0, 1)$, то $x^2 - x + (1 - a^2) = x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 > 0$ для всех отрицательных x .

Наконец, если $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то неравенство имеет решение $x < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4a^2 - 3})$ или $x > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a^2 - 3})$. Следовательно, исходное неравенство выполняется для всех $x < 0$, если $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{4a^2 - 3}) \geq 0$. Но это неравенство равносильно

неравенствам $1 \geq \sqrt{4a^2 - 3}$, $1 \geq 4a^2 - 3$, $4 \geq 4a^2$, причем последнее неравенство справедливо, так как $a \in (0, 1)$.

Пусть $a > 1$. Тогда имеем неравенство $x^2 - x + (1 - a^2) < 0$. Это неравенство не может выполняться одновременно для всех отрицательных x . Например, оно не выполняется для всех достаточно больших отрицательных x .

129. $\frac{1}{2} < a < 1$ или $1 < a < 4$.

Решение. Корни первого уравнения неположительные и равны $-a^2$ и $-2a^2$.

Рассмотрим второе уравнение. Его корни легко найти. Действительно, $x^3 + ax^2 - 4a^3x - 4a^4 = (x^3 - 4a^3x) + (ax^2 - 4a^4) = x(x^2 - 4a^3) + a(x^2 - 4a^3) = (x + a)(x^2 - 4a^3) = 0$. Следовательно, $x_1 = -a$. Кроме того, при $a \geq 0$ имеются еще корни $x_{2,3} = \pm 2a\sqrt{a}$.

Если $a < 0$, то $x_1 > 0$, поэтому неравенство $-2a^2 < x_1 < -a^2$ не имеет решений. Если $a \geq 0$, то следует рассмотреть неравенства

$$-2a^2 < -a < -a^2 \quad \text{и} \quad -2a^2 < -2a\sqrt{a} < -a^2.$$

Здесь первое неравенство не удовлетворяется при $a = 0$. Если же $a > 0$, то после сокращения на $-a$ получаем $2a > 1 > a$, поэтому $\frac{1}{2} < a < 1$.

Рассмотрим второе неравенство, которое также не удовлетворяется при $a = 0$. Если же $a > 0$, то после сокращения на $-a\sqrt{a}$ имеем $2\sqrt{a} > 2 > \sqrt{a}$, поэтому $1 < a < 4$.

Так как полученные условия $\frac{1}{2} < a < 1$ и $1 < a < 4$ не содержат общих значений для a , они будут условиями, при которых один и только один корень второго уравнения лежит между корнями первого уравнения.

130. $(0, 4)$ при всех значениях a и дополнительно пары чисел $(-1, 3)$, $(-1, 5)$ при $1 < a < 5$.

Решение. Преобразуем систему неравенств в систему вида

$$\begin{cases} x > -2 + \left| \frac{a}{2}(y - 4)^2 - \frac{3}{2} \right|, \\ x + |y - 4| < 1. \end{cases}$$

Второму неравенству и вытекающему из первого неравенства неравенству $x > -2$ удовлетворяют только четыре пары целых чисел: $(-1, 3)$, $(-1, 4)$, $(-1, 5)$ и $(0, 4)$.

Если $x = 0$, то из первого неравенства получаем $|a/2(y - 4)^2 - 3/2| < 2$, поэтому $-1/2 < a/2(y - 4)^2 < 7/2$. Следовательно, $y = 4$ удовлетворяет последнему неравенству для любых значений параметра a .

Если $x = -1$, то первое неравенство имеет вид $|a/2(y - 4)^2 - 3/2| < 1$, т.е. $1/2 < a/2(y - 4)^2 < 5/2$. Полученное неравенство не выполняется для $y = 4$. Если же $y = 3$ или $y = 5$, то имеем условие на a : $\frac{1}{2} < a/2 < \frac{5}{2}$, т.е. $1 < a < 5$.

$$131. -\frac{1}{2} < a < 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$x - a = \sqrt{x^2 + 2(a + 1)x + 4a}.$$

Очевидно, что необходимо выполнение неравенства $x - a \geq 0$, т.е. $x \geq a$. При этом, возведя обе части уравнения в квадрат, получаем уравнение $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 + 2(a + 1)x + 4a$, откуда $a^2 - 4a = 4ax + 2x$, $a(a - 4) = 2(2a + 1)x$.

Если $2a + 1 = 0$, то $a = -\frac{1}{2}$, и для этого значения параметра a левая часть $a(a - 4) \neq 0$. Следовательно, уравнение не имеет решения.

$$\text{Если } 2a + 1 \neq 0, \text{ то } x = \frac{a(a-4)}{2(2a+1)}.$$

Рассмотрим теперь неравенство $x \geq a$, т.е. $\frac{a(a-4)}{2(2a+1)} \geq a$.

Если $2a + 1 > 0$, то $a(a - 4) \geq 2(2a + 1)a$, поэтому $a^2 - 4a \geq 4a^2 + 2a$ и $3a^2 + 6a \leq 0$. Таким образом, $a(a + 2) \leq 0$, откуда $-2 \leq a \leq 0$, что вместе с условием $2a + 1 > 0$ дает $-\frac{1}{2} < a \leq 0$.

Если $2a + 1 < 0$, то получаем неравенство $a(a + 2) \geq 0$, поэтому $a \leq -2$ или $a \geq 0$. Так как $a < -\frac{1}{2}$, необходимо рассмотреть только такие a , для которых выполняется неравенство $a \leq -2$. В то же время при $a \leq -2$ корень уравнения $x = \frac{a(a-4)}{2(2a+1)} < 0$.

Наконец, при $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ справедливо неравенство $x = \frac{a(a-4)}{2(2a+1)} \geq 0$, причем $x = 0$ только при $a = 0$. Таким образом, первоначальное уравнение имеет положительное решение только при $-\frac{1}{2} < a < 0$.

132. $0 < a < \frac{1}{2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$2a - x = \sqrt{x^2 - 2(x + a) - a^2}.$$

Необходимо, чтобы $2a - x \geq 0$, т.е. $x \leq 2a$. При выполнении этого условия возведем обе части уравнения в квадрат. Тогда получим уравнение $4a^2 - 4ax + x^2 = x^2 - 2(x + a) - a^2$, откуда $5a^2 + 2a = 4ax - 2x$, $(5a + 2)a = 2(2a - 1)x$.

Если $2a - 1 = 0$, то $a = \frac{1}{2}$ и $(5a + 2)a \neq 0$. Следовательно, в этом случае уравнение не имеет решений.

Если $2a - 1 \neq 0$, то $x = \frac{(5a+2)a}{2(2a-1)}$.

Теперь рассмотрим неравенство $x \leq 2a$.

Если $2a - 1 > 0$, т.е. $a > \frac{1}{2}$, то неравенство $\frac{(5a+2)a}{2(2a-1)} \leq 2a$ равносильно неравенству $(5a + 2)a \leq 4a(2a - 1)$, поэтому $5a^2 + 2a \leq 8a^2 - 4a$, $3a^2 - 6a \geq 0$ и $a^2 - 2a \geq 0$. Следовательно, $a \geq 2$ или $a \leq 0$, поэтому $a \geq 2$, так как мы рассматриваем случай, когда $a > \frac{1}{2}$.

Если $2a - 1 < 0$, то получаем противоположное неравенство $a^2 - 2a \leq 0$, поэтому $0 \leq a \leq 2$, откуда следует $0 \leq a < \frac{1}{2}$, так как $a < \frac{1}{2}$.

Наконец, при $a \geq 2$ решение $x = \frac{(5a+2)a}{2(2a-1)} > 0$, а для $a \in [0, \frac{1}{2})$ справедливо неравенство $x = \frac{(5a+2)a}{2(2a-1)} \leq 0$, причем $x = 0$ только при $a = 0$.

Таким образом, решение первоначального уравнения существует и является отрицательным только при $0 < a < \frac{1}{2}$.

133. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 1$.

Решение. Требуется найти условие, при котором

$$P(X, Y, Z) = P(x, y, z).$$

Отметим, что $x + y + z = (aX + bY + cZ) + (aY + bZ + cX) + (aZ + bX + cY) = (a + b + c)(X + Y + Z)$. Кроме того,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (aX + bY + cZ)^2 + (aY + bZ + cX)^2 + (aZ + bX + cY)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2(ab + ac + bc)(XY + XZ + YZ).$$

Но легко проверить, что $2(XY + XZ + YZ) = (X + Y + Z)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)$, поэтому

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) + (ab + ac + bc)((X + Y + Z)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(X^2 + Y^2 + Z^2) + (ab + ac + bc)(X + Y + Z)^2.$$

Следовательно,

$$P(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2) = (a + b + c)^2(X + Y + Z)^2 - 3(ab + ac + bc) \times (X + Y + Z)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \times (X^2 + Y^2 + Z^2) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \times ((X + Y + Z)^2 - 3(X^2 + Y^2 + Z^2)),$$

т.е. $P(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)P(X, Y, Z)$, откуда получаем искомое условие: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 1$.

134. $a^3 + b^3 = 1$.

Решение. Требуется найти условие, при котором

$$Q(X, Y, Z) = Q(x, y, z).$$

Отметим, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = (aY + bZ)^3 + (aZ + bX)^3 + (aX + bY)^3 = a^3(X^3 + Y^3 + Z^3) + 3a^2b(Y^2Z + Z^2X + X^2Y) + 3ab^2(YZ^2 + ZX^2 + XY^2) + b^3(X^3 + Y^3 + Z^3) = (a^3 + b^3)(X^3 + Y^3 + Z^3) + 3a^2b(Y^2Z + Z^2X + X^2Y) + 3ab^2(YZ^2 + ZX^2 + XY^2).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}xyz &= (aY + bZ)(aZ + bX)(aX + bY) = \\&= (a^2YZ + abXY + abZ^2 + b^2XZ)(aX + bY) = \\&= (a^3 + b^3)XYZ + a^2b(Y^2Z + X^2Y + Z^2X) + \\&+ ab^2(YZ^2 + ZX^2 + XY^2).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}Q(x, y, z) &= (a^3 + b^3)(X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ) = \\&= (a^3 + b^3)Q(X, Y, Z),\end{aligned}$$

откуда получаем искомое условие $a^3 + b^3 = 1$.

135. $p < a < \frac{32}{27}p^3 + p$, если $p > 0$; $\frac{32}{27}p^3 + p < a < p$, если $p < 0$, и для $p = 0$ решений не существует.

Решение. Рассмотрим кубический трехчлен $y = x^3 + 2px^2 + p$. Так как $y' = 3x^2 + 4px$, критическими точками являются $x = 0$ и $x = -4p/3$.

Если $p = 0$, то уравнение имеет вид $x^3 = a$. Следовательно, в этом случае оно имеет только одно решение. Другими словами, в случае, когда $p = 0$, не существует таких значений a , для которых данное уравнение имеет три различных корня.

Если $p > 0$, то $-4p/3 < 0$. Тогда знак производной $y' = 3x^2 + 4px$ при переходе через критическую точку $x = -4p/3$ изменяется с плюса на минус, а при переходе через $x = 0$ — с минуса на плюс. Таким образом, $x = -4p/3$ является точкой локального максимума, а $x = 0$ — точкой локального минимума, поэтому данное уравнение имеет три разных решения для всех a , которые лежат между значениями кубического трехчлена в критических точках, т.е.

$$p < a < (-4p/3)^3 + 2p(-4p/3)^2 + p = (32/27)p^3 + p.$$

Случай, когда $p < 0$, рассматривается аналогично.

136. Если $a \geq 0$, то решений не существует; если $a < 0$, то $-\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1 < q < \frac{4}{3}\sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1$.

Решение. Рассмотрим кубический трехчлен $y = ax^3 + 2x + 1$. Так как производная $y' = 3ax^2 + 2$, то в случае, когда $a \geq 0$, $y' > 0$, поэтому функция $y = ax^3 + 2x + 1$ строго возрастает. Следовательно, уравнение $ax^3 + 2x + 1 = q$ может иметь только одно решение. Другими словами, при $a \geq 0$ не существует таких значений q , для которых уравнение имеет три разных корня.

Предположим теперь, что $a < 0$. Тогда имеем две критические точки $x = \pm \sqrt{-2/3a}$. Легко видеть, что при переходе через точку $x = -\sqrt{-2/3a}$ производная изменяет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку $x = +\sqrt{-2/3a}$ — с плюса на минус. Следовательно, $x = -\sqrt{-2/3a}$ является точкой локального минимума, а $x = +\sqrt{-2/3a}$ — точкой локального максимума. Отсюда следует, что данное уравнение имеет три разных решения для всех q , которые лежат между значениями кубического трехчлена в критических точках, т.е.

$$a \left(-\sqrt{-\frac{2}{3a}} \right)^3 + 2 \left(-\sqrt{-\frac{2}{3a}} \right) + 1 = -\frac{4}{3} \sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1 <$$

$$< q < a \left(+\sqrt{-\frac{2}{3a}} \right)^3 + 2 \sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1 = \frac{4}{3} \sqrt{-\frac{2}{3a}} + 1.$$

ГЛАВА 3. НАЧАЛА АНАЛИЗА. ЗАДАЧИ НА НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

1. Линия электропередач должна проходить вдоль большей диагонали ромба.

Решение. Пусть $BO = a$, $AO = b$ (рис. 2). Считаем для определенности, что $b \geq a$. На прямую l (линию электропередач) опускаем перпендикуляры из вершин ромба A и B . Тогда $\angle BOE = \angle FOD = \angle OAF$. Из подобия треугольников OBE и OAF следует, что $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA}$, поэтому $AF = \frac{OA}{OB} \cdot OE = \frac{b}{a} \cdot OE$ и $BE + AF = BE + \frac{b}{a} \cdot OE \geq \geq BE + OE \geq OB = a$.

Таким образом, наименьшее значение для $2(BE + AF)$ равно $2a$, причем оно достигается при $BE = a$, т.е. при $E = O$. В результате прямая l , соответствующая наименьшей длине провода, должна проходить через точки A и C .

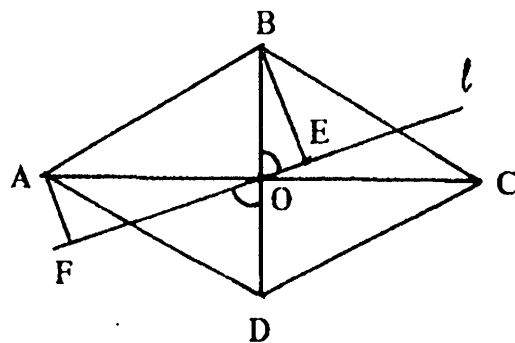


Рис. 2.

2. Подъездной путь следует строить по прямой от завода к городу.

Решение. Пусть A – город, C – завод, а железная дорога проходит в направлении отрезка AB (рис. 3), где $AB = 20$, BC перпендикулярно AB , $BC = 60$. Пусть подъездной путь проложен от завода C в точку D , расположенную на отрезке AB . Тогда стоимость провоза 1 тонны груза по маршруту CDA пропорциональна $CD + \frac{1}{3}AD$. Пусть DF перпендикулярно AC и $CE = CD$.

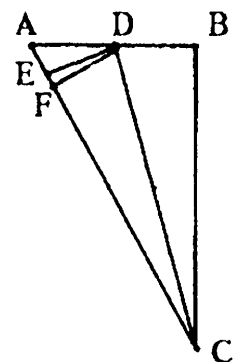


Рис. 3.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} AC &= AE + EC = AE + CD \leq AF + CD = \\ &= \frac{AD}{\sqrt{10}} + CD \leq \frac{AD}{3} + CD. \end{aligned}$$

Следовательно, наименьшая стоимость достигается при $CD = CA$, т.е. при $AD = 0$. В результате получаем, что подъездной путь должен проходить прямо от завода в город.

3. $F_{\min} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}P$, сила прикладывается к телу под углом $\alpha = \arcsin \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

Решение. Из рис. 4 видно, что наименьшее значение

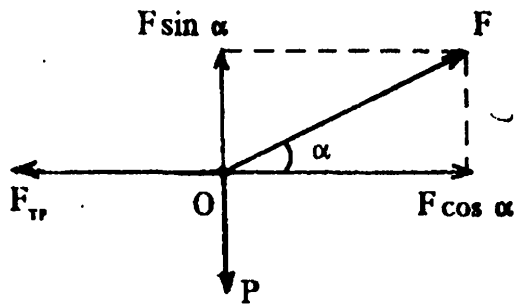


Рис. 4.

силы F , под воздействием которой тело O может быть сдвинуто с места и направление действия которой образует угол α к горизонту, должно удовлетворять соотношению $k(P - F \sin \alpha) = F \cos \alpha$, откуда получаем, что

$$F = \frac{k}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Следовательно, F_{\min} соответствует наибольшему значению знаменателя.

Пусть $x = \sin \alpha$. Рассмотрим функцию $y = kx + \sqrt{1 - x^2}$, для которой необходимо найти наибольшее значение на промежутке $[0, 1]$. Если y — одно из значений этой функции, то уравнение $y = kx + \sqrt{1 - x^2}$ разрешимо относительно x . В то же время это уравнение в результате преобразований сводится к уравнению

$$(k^2 + 1)x^2 - 2kux + (y^2 - 1) = 0,$$

которое разрешимо относительно x в области действительных чисел, если $D = k^2y^2 - (y^2 - 1)(k^2 + 1) \geq 0$, т.е. $y^2 \leq k^2 + 1$. В результате $|y| \leq \sqrt{k^2 + 1}$ и $y = \sqrt{k^2 + 1}$ является наибольшим значением функции. Для этого значения y квадратное уравнение имеет вид $(\sqrt{k^2 + 1} \cdot x - k)^2 = 0$, поэтому

$$\sin \alpha = x = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{и} \quad \alpha = \arcsin \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Замечание. При решении задачи можно использовать также дифференциальное исчисление. Для функции $y = f(x) =$

$= kx + \sqrt{1-x^2}$ имеем $f'(x) = k - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, поэтому при нахождении критической точки достаточно решить уравнение $f'(x) = 0$, т.е. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = k$.

$$4. S_{\min} = \frac{\pi}{2}(a + b - \sqrt{2ab})^2.$$

Решение. Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ — стороны данного прямоугольника (рис. 5), O и O_1 — центры окружностей, r и R — радиусы, OO_1F — прямоугольный треугольник с катетами OF и O_1F , параллельными соответствующим сторонам прямоугольника.

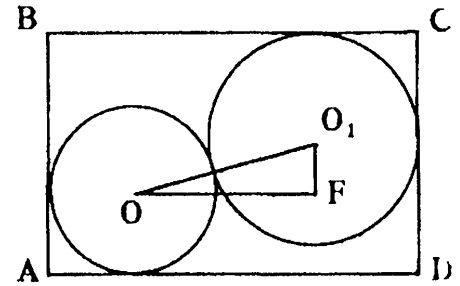


Рис. 5.

Тогда $OO_1^2 = OF^2 + O_1F^2$ и, следовательно,

$$(r + R)^2 = (b - (r + R))^2 + (a - (r + R))^2.$$

После преобразования получаем квадратное уравнение относительно $r + R$:

$$(r + R)^2 - 2(a + b)(r + R) + a^2 + b^2 = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень уравнения, находим $r + R = a + b - \sqrt{2ab}$. Тогда сумма площадей двух кругов

$$\begin{aligned} S &= \pi(r^2 + R^2) = \pi((r + R)^2 - 2rR) = \\ &= \pi((a + b - \sqrt{2ab})^2 - 2rR). \end{aligned}$$

Таким образом, S будет наименьшей, если при условии $r + R = a + b - \sqrt{2ab}$ произведение rR принимает наибольшее значение. Но последнее имеет место при $r = R$, т.е. $r = R = \frac{1}{2}(a + b - \sqrt{2ab})$. В результате получаем, что $S_{\min} = \frac{\pi}{2}(a + b - \sqrt{2ab})^2$.

$$5. v = \sqrt{\frac{a}{k}}.$$

Решение. Пусть s – расстояние между портами. Тогда $t = s/v$ – время, затрачиваемое на путь из одного порта в другой, поэтому

$$\frac{s}{v}(a + kv^2) = s \left(\frac{a}{v} + kv \right)$$

– затраты на один рейс. Следовательно, задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $f(v) = a/v + kv$ при $v > 0$.

Если y есть значение функции $f(v)$, то уравнение $y = \frac{a}{v} + kv$ (или $kv^2 - yv + a = 0$) разрешимо относительно v . Здесь условием разрешимости является $D = y^2 - 4ka \geq 0$, откуда $y \geq 2\sqrt{ka}$. Таким образом, наименьшее значение для $f(v)$ равно $2\sqrt{ka}$ и соответствует скорости $v = \sqrt{a/k}$.

Замечание. Искомое значение скорости является критической точкой функции $f(v) = \frac{a}{v} + kv$. Однако $f'(v) = -\frac{a}{v^2} + k = 0$ имеет решение $v = \sqrt{a/k}$.

$$6. \sqrt{(a+b)b}.$$

Решение. Пусть $PQ = x$, $\angle PQB = \beta$, $\angle BQA = \alpha$ (рис. 6). Тогда $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a+b}{x}$,

$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{x}$. Следовательно,

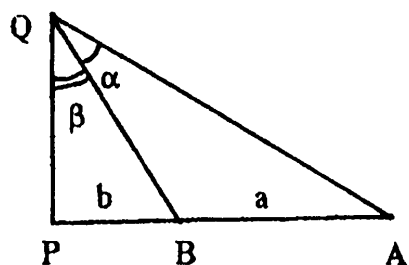


Рис. 6.

$$\frac{a+b}{x} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{b}{x}}{1 - \frac{b}{x} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Разрешая уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ax}{x^2 + (a+b)b}.$$

Так как тангенс является строго возрастающей функцией в интервале $(0, \pi/2)$, наибольшее значение угла соответствует наибольшему значению тангенса, поэтому достаточно найти

x , при котором функция $f(x) = \frac{x}{x^2 + (a+b)b}$ достигает своего наибольшего значения в интервале $(0, +\infty)$.

Если y есть одно из значений функции $f(x)$, то уравнение $y = \frac{x}{x^2 + (a+b)b}$ разрешимо относительно x . После равносильных преобразований уравнение принимает вид $yx^2 - x + y(a+b)b = 0$. Тогда условие разрешимости уравнения состоит в выполнении неравенства $D = 1 - 4y^2(a+b)b \geq 0$, т.е. $y \leq \frac{1}{2\sqrt{(a+b)b}}$.

Таким образом, наибольшее значение функции равно $\frac{1}{2\sqrt{(a+b)b}}$, а соответствующее ему значение для x можно найти из соотношения

$$\frac{1}{2\sqrt{(a+b)b}} = \frac{x}{x^2 + (a+b)b},$$

т.е. $(x - \sqrt{(a+b)b})^2 = 0$. В результате искомое расстояние $x = \sqrt{(a+b)b}$.

Замечание. Для функции $f(x) = \frac{x}{x^2 + (a+b)b}$ производная

$$f'(x) = \frac{(a+b)b - x^2}{(x^2 + (a+b)b)^2},$$

поэтому уравнение $f'(x) = 0$ имеет в интервале $(0, +\infty)$ единственное решение $x = \sqrt{(a+b)b}$. При переходе через эту критическую точку производная меняет знак с плюса на минус, поэтому точка $x = \sqrt{(a+b)b}$ является точкой локального максимума. Нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция достигает своего наибольшего значения.

$$7. \sqrt{\frac{3E}{2m_1(3-4\sin^2 \alpha/2)}}.$$

Решение. Пусть m – масса первой частицы, v – ее скорость. Поэтому $E = \frac{mv^2}{2}$ и $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Далее, пусть m_1 – масса второй частицы, а v_1 – скорость каждой из новых ча-

стиц. Тогда из закона сохранения импульса получаем соотношение

$$(m + m_1)v_1 \cos \beta = mv,$$

где β – угол между направлением движения начальной движущейся частицы и каждой из новых частиц. Следовательно,

$$v_1 = \frac{mv}{(m + m_1) \cos \beta} = \frac{\sqrt{2E}}{\cos \beta} \cdot \frac{\sqrt{m}}{m + m_1} = \frac{\sqrt{2E}}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{m} + \frac{m_1}{\sqrt{m}}}.$$

В то же время

$$\sqrt{m} + \frac{m_1}{\sqrt{m}} = \left(\sqrt[4]{m} - \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt[4]{m}} \right)^2 + 2\sqrt{m_1} \geq 2\sqrt{m_1},$$

причем наименьшее значение $2\sqrt{m_1}$ достигается при $m = m_1$, откуда

$$v_{1 \max} = \frac{\sqrt{2E}}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{m_1}}.$$

Осталось найти $\cos \beta$. Для этого рассмотрим правильную треугольную пирамиду, у которой сторона основания равна a , а боковые ребра образуют между собой угол α . Если боковое ребро равно l , то

$$\frac{a}{2l} = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{3} l} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}},$$

откуда получаем

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

8. $\frac{4p}{m}(1 + \cos \alpha).$

Решение. Если m_1, m_2 – массы первоначальных частиц, то $m_1 + m_2 = m$, $v_2 = p/m_2$. Из закона сохранения импульса получаем

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m v_2 \cos \alpha, \quad m_1 v_1 = (m \cos \alpha + m_2) v_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \frac{m \cos \alpha + m_2}{m_1} \frac{p}{m_2} + \frac{p}{m_2} = \\ &= \frac{p}{m_2} \frac{m \cos \alpha + m_2 + m_1}{m_1} = p(m \cos \alpha + m) \frac{1}{m_1 m_2}. \end{aligned}$$

Найдем наименьшее из возможных значений $\frac{1}{m_1 m_2}$:

$$\frac{1}{m_1 m_2} = \frac{1}{(m - m_2) m_2} = \frac{1}{\frac{m^2}{4} - \left(m_2 - \frac{m}{2}\right)^2} \geq \frac{4}{m^2},$$

причем наименьшее значение, равное $4/m^2$, достигается при $m_2 = m/2$, т.е. $m_1 = m_2 = m/2$. Таким образом,

$$(v_1 + v_2)_{\min} = pm(\cos \alpha + 1) \cdot \frac{4}{m^2} = \frac{4p(1 + \cos \alpha)}{m}.$$

9. 30 тракторов, 816 руб.

Решение. Если производственное объединение посылает на ферму x тракторов, то время работы их $120/x$ дней. Следовательно, суммарная выплата рабочим определяется уравнением

$$\frac{120}{x} \cdot 30 + 4x + \frac{120}{x} \cdot 4,8x = 4 \left(\frac{900}{x} + x \right) + 576.$$

Для решения задачи достаточно найти наименьшее значение функции $f(x) = 900/x + x$ при $x > 0$. Так как

$$\frac{900}{x} + x = \left(\frac{30}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)^2 + 60 \geq 60,$$

искмое наименьшее значение функции, равное 60, принимается тем x , которое является решением уравнения $\frac{30}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 0$, т.е. $x = 30$.

Наконец, соответствующие выплаты рабочим составляют

$$4 \cdot 60 + 576 = 240 + 576 = 816 \text{ руб.}$$

З а м е ч а н и е. Искомое экстремальное значение функции $f(x) = \frac{900}{x} + x$ можно найти, определив критическую точку, т.е. решение уравнения $f'(x) = -900/x^2 + 1 = 0$. Следовательно, $x = 30$ — точка локального минимума, так как производная $f'(x)$ при переходе через критическую точку меняет знак с минуса на плюс. Наконец, нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция принимает свое наименьшее значение.

10. $h = 1/3$ м; 90 руб.

Р е ш е н и е. Пусть h — высота ящика, м. Тогда его объем равен $1,5h \text{ м}^3$, поэтому необходимо сделать $100/h$ перевозок, стоимость которых равна $\frac{100}{h} \cdot 0,1 = \frac{10}{h}$. Кроме того, стоимость ящика равна $(1,5 \cdot 1 + 2 \cdot 1,5h)20 + 2 \cdot 1 \cdot h \cdot 15 = 30 + 60h + 30h = 30 + 90h$ рублей. Следовательно, суммарная стоимость транспортировки гравия

$$10/h + 90h + 30 = 10(1/h + 9h) + 30.$$

Достаточно найти наименьшее значение функции $f(h) = 1/h + 9h$ на интервале $(0, +\infty)$. Учитывая, что

$$\frac{1}{h} + 9h = \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - 3\sqrt{h} \right)^2 + 6 \geq 6,$$

получаем наименьшее значение, равное 6 и принимаемое при $1/\sqrt{h} - 3\sqrt{h} = 0$, т.е. $h = 1/3$. Наконец, минимальная стоимость транспортировки гравия $10 \cdot 6 + 30 = 90$ руб.

11. 80, 90, 92, 92 рабочих.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $P = f(x) = M - x - \frac{b}{x}$. Для нахождения точки, в которой функция принимает наибольшее значение, вычислим производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = -1 + \frac{b}{x^2} = 0,$$

откуда получим $x = \sqrt{b} = \sqrt{8464} = 92$. Исследовав знак производной, легко убедиться, что при $0 < x \leq 92$ функция монотонно возрастает, а при $x \geq 92$ монотонно убывает. Следовательно, на отрезке $[1, 80]$ она принимает наибольшее значение на правом конце: $x = 80$, на отрезке $[1, 90]$ – также на правом конце: $x = 90$, на отрезках $[1, 120]$ и $[1, 150]$ – в точке $x = 92$.

12. 15, 18, 20 рабочих.

Решение. Рассмотрим функцию $Q = f(x) = L - x^2 - \frac{a}{x}$. Для нахождения точки, в которой функция принимает наибольшее значение, вычислим производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = -2x + \frac{a}{x^2} = 0,$$

откуда получаем $x = \sqrt[3]{a/2} = \sqrt[3]{8000} = 20$. Так как $f'(x) > 0$ при $1 < x < 20$ и $f'(x) < 0$ при $x > 20$, функция $Q = f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[1, 20]$ и монотонно убывает при $x \geq 20$. Следовательно, на отрезках $[1, 15]$ и $[1, 18]$ функция принимает наибольшее значение на правом конце отрезка, т.е. при $x = 15$ и $x = 18$ соответственно, а на отрезке $[1, 25]$ – во внутренней (критической) точке $x = 20$.

13. Если $aq - bp > 0$, то при условии $p + \frac{aq}{b} \leq 200$ второй цикл следует прекратить через $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right)$ часов, а при условии $p + \frac{aq}{b} > 200$ – через $\frac{100-p}{q}$ часов. Если $aq - bp \leq 0$, то второй цикл работ не следует начинать.

Решение. Через x часов после начала второго цикла работ имеется $(a - xb)$ литров воды, а доля вредных веществ в ней – $(p + xq)\%$, поэтому объем вредных веществ составляет

$$(a - xb) \cdot \frac{p + xq}{100} = \frac{1}{100}(-bqx^2 + (aq - bp)x + ap).$$

Квадратный трехчлен $f(x) = -bqx^2 + (aq - bp)x + ap$ имеет отрицательный коэффициент при старшей степени, поэтому он принимает наибольшее значение в критической точке.

Из уравнения

$$f'(x) = -2bqx + (aq - bp) = 0$$

находим

$$x = \frac{aq - bp}{2bq} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right).$$

В то же время необходимо учитывать то обстоятельство, что в задаче речь идет о наибольшем значении квадратного трехчлена только на отрезке $[0, (100-p)/q]$. Следовательно, решение задачи зависит от взаимного расположения критической точки и концов отрезка.

Если критическая точка расположена левее точки 0 или совпадает с ней, т.е. $aq - bp \leq 0$, то на рассматриваемом отрезке квадратный трехчлен монотонно убывает, поэтому он принимает наибольшее значение на левом конце отрезка $x = 0$.

Если критическая точка расположена правее точки $x = \frac{100-p}{q}$ или совпадает с ней, то на отрезке квадратный трехчлен монотонно возрастает, поэтому его наибольшее значение достигается на правом конце отрезка.

Если же критическая точка расположена внутри отрезка, то квадратный трехчлен в этой точке принимает значение, наибольшее среди значений в точках рассматриваемого отрезка.

14. Если $\frac{a}{b} - \frac{A}{B} > 0$, то второй этап обработки следует прекратить через $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{A}{B} \right)$ суток. Если $\frac{a}{b} - \frac{A}{B} \leq 0$, то выход вещества максимален в начале второго этапа обработки.

Решение. Через x суток после начала второго этапа обработки имеется $(A + xB)$ тонн продукта, при этом доля изготовляемого вещества равна $(a - xb)\%$, поэтому через x суток имеется

$$\frac{1}{100}(a - xb)(A + xB) = \frac{1}{100}(-bBx^2 + (aB - bA)x + aA)$$

тонн изготовляемого вещества.

Квадратный трехчлен $f(x) = -bBx^2 + (aB - bA)x + aA$ имеет отрицательный коэффициент при старшей степени,

поэтому он принимает наибольшее значение в критической точке. Но тогда из уравнения $f'(x) = -2bBx + (aB - bA) = 0$ находим

$$x = \frac{aB - bA}{2bB} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{A}{B} \right).$$

Если $aB - bA \leq 0$, то квадратный трехчлен имеет производную $f'(x) < 0$ при $x > 0$, поэтому он является монотонно убывающей функцией при $x \geq 0$. Следовательно, его наибольшее значение на $[0, +\infty)$ достигается при $x = 0$.

Если $aB - bA > 0$, то наибольшее значение трехчлена на $[0, +\infty)$ достигается в критической точке $x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{A}{B} \right)$. Так как $f(0) = aA > 0$, то в этом случае и наибольшее значение квадратного трехчлена также положительное.

15. $\frac{7P}{3C}$ с.

Решение. Пусть x – скорость ввода информации, бит/с. Тогда $(3C - x)$ – скорость выдачи информации, а продолжительность работы вычислительной машины

$$T = \frac{P}{x} + \frac{P}{C} + \frac{P}{3C - x} = \frac{P}{C} + \frac{3CP}{x(3C - x)}.$$

Наименьшее значение для T на интервале $(0, 3C)$ соответствует наибольшему значению знаменателя $x(3C - x)$ и достигается при $x = 3C/2$. Таким образом,

$$T_{\min} = \frac{2P}{3C} + \frac{P}{C} + \frac{P}{3C - 3C/2} = \left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} \right) \frac{P}{C} = \frac{7P}{3C}.$$

16. $2\sqrt{\frac{C}{k}}$ с.

Решение. Если в ЭВМ вводится некоторая информация объемом x бит, то суммарная информация, поступающая в вычислительную машину, составляет $(x + C)$ бит. Эта информация поступает в вычислительную машину со скоростью v бит/с, для которой $v^2 = kx$, т.е. $v = \sqrt{kx}$. Следовательно,

продолжительность работы равна $\frac{x+C}{v} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sqrt{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \right)$. По условию задачи необходимо найти наименьшее значение последнего выражения при $x > 0$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sqrt{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sqrt[4]{x} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{C}{k}} \geq 2\sqrt{\frac{C}{k}},$$

поэтому наименьшее значение равно $2\sqrt{\frac{C}{k}}$ и достигается при $\sqrt[4]{x} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt[4]{x}} = 0$, т.е. при $x = C$.

17. $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.

Решение. Если x — радиус основания конуса и l — длина образующей, то площадь боковой поверхности $S = \pi x l$, откуда $l = S/\pi x$. Тогда высота конуса

$$h = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 x^2} - x^2} = \frac{1}{\pi x} \sqrt{S^2 - \pi^2 x^4},$$

а объем его

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 h = \frac{x}{3} \sqrt{S^2 - \pi^2 x^4}.$$

По условию задачи требуется найти точку в промежутке $[0, \sqrt{S/\pi}]$, в которой функция $y = \frac{x}{3} \sqrt{S^2 - \pi^2 x^4}$ имеет наибольшее значение. Так как $y = \frac{1}{3} \sqrt{x^2(S^2 - \pi^2 x^4)}$, достаточно ограничиться (в силу монотонности квадратного корня) рассмотрением подкоренного выражения $f(x) = x^2(S^2 - \pi^2 x^4)$.

Дифференцируя функцию $f(x)$, получаем

$$f'(x) = 2xS^2 - 6\pi^2 x^5 = 2x(S^2 - 3\pi^2 x^4).$$

В то же время функция f на промежутке $[0, \sqrt{S/\pi}]$ неотрицательная и обращается в нуль на его концах. Следовательно, ее

наибольшее значение достигается во внутренней критической точке, являющейся корнем уравнения $S^2 - 3\pi^2 x^4$. Разрешая это уравнение, имеем $x = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.

18. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Решение. Если x — радиус основания цилиндра и h — его высота, то объем цилиндра $V = \pi x^2 h$, поэтому $h = \frac{V}{\pi x^2}$. Тогда площадь полной поверхности цилиндра

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi \left(x^2 + x \frac{V}{\pi x^2} \right) = 2\pi \left(x^2 + \frac{V}{\pi x} \right).$$

По условию задачи требуется найти наименьшее значение для S при $x > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + \frac{V}{\pi x}$. Ее производная $f'(x) = 2x - V/\pi x^2$, поэтому ее критическая точка есть корень уравнения $2x - V/\pi x^2$, т.е. $x = \sqrt[3]{V/2\pi}$. Легко убедиться в том, что при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка $x = \sqrt[3]{V/2\pi}$ является точкой локального минимума. Кроме того, по знаку производной видно, что при $0 < x < \sqrt[3]{V/2\pi}$ функция убывает, а при $x \geq \sqrt[3]{V/2\pi}$ — возрастает, поэтому критическая точка является точкой, в которой функция принимает наименьшее значение.

19. $\frac{4R}{3}, \frac{8\pi R^2}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Если x — высота конуса, то радиус его основания $r = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{2xR - x^2}$, а длина образующей $l = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{2xR}$. Следовательно, боковая поверхность имеет площадь

$$S = \pi r l = \pi \sqrt{2xR(2xR - x^2)}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2xR(2xR - x^2)$ и найдем ее наибольшее значение на промежутке $[0, 2R]$. Так как $f'(x) = 2Rx(4R - 3x)$, функция f неотрицательна на промежутке

$[0, 2R]$ и обращается в нуль на концах данного промежутка, то наибольшее значение достигается ею в единственной внутренней критической точке $x = 4R/3$. Это наибольшее значение равно $64 R^4/27$. Таким образом, искомое наибольшее значение площади боковой поверхности есть $\pi \sqrt{\frac{64}{27} R^4} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} R^2$.

20. $\frac{R}{\sqrt{2}}, 2\pi R^2$.

Решение. Если x — радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиусом R , то расстояние от центра шара до основания цилиндра равно $\sqrt{R^2 - x^2}$, поэтому высота цилиндра $h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi xh = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x\sqrt{R^2 - x^2}$ на промежутке $[0, R]$ и найдем ее наибольшее значение. Очевидно, что эта функция неотрицательная и обращается в нуль на концах промежутка. Если эта функция внутри промежутка имеет единственную критическую точку, то значение функции в критической точке будет наибольшим по сравнению со значениями во всех точках рассматриваемого промежутка.

Далее, так как

$$f'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

критическая точка есть корень уравнения $R^2 - 2x^2 = 0$, т.е. $x = R/\sqrt{2}$.

Таким образом, наибольшее значение площади боковой поверхности цилиндра

$$S_{\max} = 4\pi \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\pi R^2.$$

21. $\frac{23-\sqrt{17}}{16} R$.

Решение. Если x — высота конуса ($0 < x < 2R$), то радиус его основания $r = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2xR - x^2}$, а

длина образующей $l = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{2xR}$. Следовательно, площадь полной поверхности

$$S = \pi r l + \pi r^2 = \pi (\sqrt{2xR(2xR - x^2)} + 2xR - x^2).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{2xR(2xR - x^2)} + 2xR - x^2$ и найдем ее критические точки в интервале $(0, 2R)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{4xR^2 - 3Rx^2}{\sqrt{2xR(2xR - x^2)}} + 2(R - x),$$

поэтому уравнение $f'(x) = 0$ для новой неизвестной $y = x/R$ можно записать в виде

$$\frac{4y - 3y^2}{\sqrt{2y(2y - y^2)}} + 2(1 - y) = 0,$$

откуда в результате последовательных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{(4y - 3y^2)^2}{2y(2y - y^2)} &= 4(1 - y)^2, \\ (4 - 3y)^2 &= 8(2 - y)(1 - y)^2, \\ 16 - 24y + 9y^2 &= 16 - 40y + 32y^2 - 8y^3, \\ 8y^3 - 23y^2 + 16y &= 0, \\ 8y^2 - 23y + 16 &= 0. \end{aligned}$$

Квадратное уравнение имеет два решения: $y_1 = \frac{23 - \sqrt{17}}{16}$ и $y_2 = \frac{23 + \sqrt{17}}{16}$, однако y_2 является посторонним решением для исходного уравнения, так как оба слагаемых в левой части первоначального уравнения при $y = y_2$ отрицательны.

Таким образом, на промежутке $[0, 2R]$ функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, обращается в нуль на концах промежутка и имеет единственную внутреннюю критическую точку $x = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} R$, поэтому она принимает наибольшее значение в данной точке.

$$22. \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} R.$$

Решение. Если x — радиус цилиндра, вписанного в шар радиусом R , то его высота $h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, поэтому площадь полной поверхности цилиндра

$$S = 2\pi xh + 2\pi x^2 = 2\pi(2x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2} + x^2$ на промежутке $[0, R]$. Ее производная

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{R^2 - x^2} - 2\frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} + 2x = \\ &= \frac{2R^2 - 4x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Чтобы найти критические точки для функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $R^2 - 2x^2 + x\sqrt{R^2 - x^2} = 0$. В результате последовательных преобразований получаем

$$\begin{aligned} x\sqrt{R^2 - x^2} &= 2x^2 - R^2, \\ x^2(R^2 - x^2) &= 4x^4 - 4x^2R^2 + R^4, \\ 5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 &= 0, \end{aligned}$$

поэтому $x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{10} R^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} R^2$.

Здесь второе решение $x^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} R^2$ является посторонним, так как $2x^2 - R^2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) R^2 - R^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} R^2 < 0$.

Рассмотрим решение

$$x_0 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} R = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \cdot R \in (0, R).$$

Так как производная $f'(x)$ на $(0, R)$ только один раз меняет знак с плюса на минус, то функция f на промежутке $[0, x_0]$ монотонно возрастает, а на промежутке $[x_0, R]$ – монотонно убывает. Следовательно, в критической точке x_0 функция должна принимать наибольшее значение.

23. Наименьшее значение площади равно удвоенной площади параллелограмма, одна из вершин которого совпадает с вершиной угла, другая – с данной точкой, а остальные лежат на сторонах угла.

Решение. Пусть EF – отрезок прямой, проходящей через данную точку A , лежащую внутри угла (рис. 7). Пусть в параллелограмме $ABCD$ длина сторон CD и CB равна a и b соответственно. Примем за x неизвестную длину отрезка DE . Тогда из соотношения $\frac{BF}{BA} = \frac{DA}{DE}$ получаем $BF = \frac{ab}{x}$. Если α – величина данного угла, то площадь треугольника ECF вычисляется так:

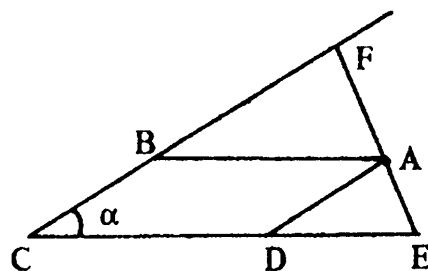


Рис. 7.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}CE \cdot CF \cdot \sin \alpha &= \frac{\sin \alpha}{2}(a+x) \left(b + \frac{ab}{x}\right) = \\ &= ab \sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{2}b \left(x + \frac{a^2}{x}\right). \end{aligned}$$

В то же время имеем

$$x + \frac{a^2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a \geq 2a,$$

причем наименьшее значение, равное $2a$, достигается при $x = a$, поэтому искомое наименьшее значение площади равно $2ab \sin \alpha$, т.е. удвоенной площади параллелограмма $ABCD$.

24. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, где a, b – длина сторон параллелограмма, одна из вершин которого совпадает с вершиной угла, вторая – с данной точкой, а остальные лежат на сторонах угла.

Решение. Пусть E и F – точки пересечения прямой со сторонами угла и $ABCD$ – параллелограмм, одна из вершин которого совпадает с данной точкой, другая – с вершиной угла, а остальные лежат на сторонах угла (рис. 8). Пусть $a = CD$, $b = CB$, $x = DE$ и $y = BF$. Тогда имеем отношение подобия $y/b = a/x$, т.е. $y = \frac{ab}{x}$.

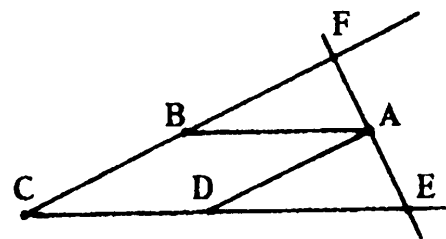


Рис. 8.

В этом случае суммарная длина

$$CE + CF = (a + x) + \left(b + \frac{ab}{x}\right) = (a + b) + \left(x + \frac{ab}{x}\right).$$

Так как $x + \frac{ab}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{ab}$, то наименьшее значение для $x + ab/x$, равное $2\sqrt{ab}$, достигается при $x = \sqrt{ab}$.

25. $[1/2, 1]$, $\frac{R}{2}$.

Решение. Пусть x – расстояние от центра шара до каждой из секущих плоскостей. Площадь полной поверхности рассматриваемого тела состоит из площади поверхности пояса, заключенного между обеими плоскостями, и площади кругов сечений шара секущими плоскостями, т.е. равна $4\pi Rx + 2\pi(R^2 - x^2)$, а площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$. Следовательно, отношение площадей

$$k = \frac{4\pi Rx + 2\pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^2} = \frac{x}{R} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right),$$

а для новой переменной $t = x/R$ получаем

$$k = f(t) = t + \frac{1}{2}(1 - t^2) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Разными способами (например, построив график квадратного трехчлена $k = f(t)$ (рис. 9)) легко проверить, что множество значений функции $f(t) = t + \frac{1}{2}(1 - t^2)$ на отрезке $[0, 1]$ есть $[1/2, 1]$. При этом значения $1/2$ и 1 соответствуют вырожденным случаям расположения секущих плоскостей $x = 0$ и $x = R$.

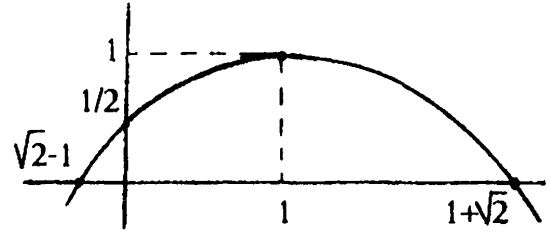


Рис. 9.

Если $k = \frac{7}{8}$, то получаем квадратное уравнение $\frac{7}{8} = t + \frac{1}{2}(1 - t^2)$, откуда $t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$ и $t = 1 \pm \sqrt{1 - 3/4} = 1 \pm 1/2$, т.е. $t = \frac{3}{2}$ или $t = \frac{1}{2}$, причем $t = \frac{3}{2}$ — посторонний корень.

Таким образом, $t = 1/2$, а соответствующее ему $x = R/2$.

26. $(0, 8/27]$, $\frac{R}{3}$.

Решение. Если x — высота конуса, вписанного в шар радиусом R , то радиус его основания $r = \sqrt{x(2R - x)}$. Следовательно, объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi}{3}x^2(2R - x)$. Кроме того, известно, что объем шара радиусом R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. В результате получаем, что отношение объемов

$$k = \frac{x^2(2R - x)}{4R^3},$$

поэтому для новой переменной $t = \frac{x}{2R}$ это отношение $k = f(t) = 2t^2(1 - t)$ ($0 < t < 1$). Так как функция $k = f(t)$ неотрицательна на промежутке $[0, 1]$, а на концах этого промежутка принимает нулевые значения, ее наибольшее значение достигается во внутренней критической точке. Учитывая, что производная $f'(t) = 4t - 6t^2 = 2t(2 - 3t)$, получаем критическую точку $t = 2/3$, поэтому искомое наибольшее значение

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}.$$

Наконец, значению $t = 2/3$ соответствует $x = 2Rt = \frac{4}{3}R$, поэтому расстояние от центра шара до основания конуса равно $R/3$.

27. $a \geq 1$.

Решение. Если $a \leq 0$, то на промежутке $[1, 2]$ функция $y = ax + 2/x$ монотонно убывает, поэтому она не может достигать наибольшего значения на правом конце этого промежутка.

Предположим, что $a > 0$. Тогда

$$y = ax + \frac{2}{x} = \left(\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{2}{x}} \right)^2 + 2\sqrt{2a},$$

и функция $y = ax + 2/x$ на множестве положительных чисел принимает наименьшее значение, равное $2\sqrt{2a}$, при $\sqrt{ax} - \sqrt{2/x} = 0$, т.е. при $x_0 = \sqrt{2/a}$. Кроме того, в интервале $(0, \sqrt{2/a})$ функция монотонно убывает, а при $x > \sqrt{2/a}$ монотонно возрастает.

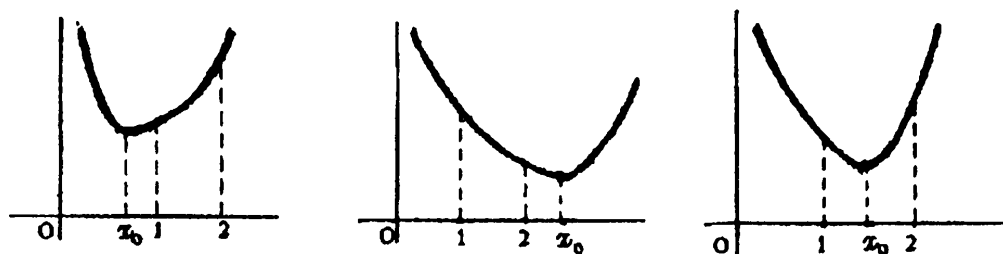


Рис. 10.

Возможны три случая взаимного расположения критической точки $x_0 = \sqrt{2/a}$ и промежутка $[1, 2]$: $x_0 < 1$, $2 < x_0$ или $1 \leq x_0 \leq 2$. Соответствующие графики приведены на рис. 10.

В любом из возможных случаев наибольшее значение достигается функцией на промежутке $[1, 2]$ при $x = 1$ или при $x = 2$. Оно достигается на правом конце промежутка, если $2a + 2/2 \geq 1 \cdot a + 2/1$, т.е. $a \geq 1$.

$$28. b \geq -8.$$

Решение. Если $b \geq 0$, то на промежутке $[2, 3]$ функция $y = 2x - b/x$ монотонно возрастает, поэтому она принимает наименьшее значение на левом конце промежутка.

Предположим, что $b < 0$, и найдем критические точки функции. Так как $y' = 2 + b/x^2$, критические точки являются решениями уравнения $2 + b/x^2 = 0$, т.е. $x = \pm\sqrt{-b/2}$. В интервале $(0, +\infty)$ имеется только одно решение $x_0 = +\sqrt{-b/2}$. При этом $y' < 0$, если $0 < x < x_0$, и $y' > 0$, если $x > x_0$. Отсюда следует, что функция монотонно убывает на $(0, x_0]$ и монотонно возрастает на $[x_0, +\infty)$.

Таким образом, на промежутке $[2, 3]$ функция монотонно возрастает, если $x_0 \leq 2$, поэтому в этом случае ее наименьшее значение достигается на левом конце промежутка. Если $x_0 \geq 3$, то на $[2, 3]$ функция монотонно убывает, поэтому наименьшее значение достигается на правом конце промежутка. Наконец, если $2 < x_0 < 3$, то точкой, где функция принимает наименьшее значение, является внутренняя точка промежутка $[2, 3]$.

В результате в случае, когда $b < 0$, получаем условие $\sqrt{-b/2} \leq 2$, т.е. $b \geq -8$, что вместе с решением задачи $b \geq 0$ приводит к окончательному ответу: $-8 \leq b < +\infty$.

$$29. 3/4 \leq p < +\infty.$$

Решение. Для функции $f(x) = x^3 - 2px^2 + 1$ имеем $f'(x) = 3x^2 - 4px = x(3x - 4p)$. Если $p \leq 0$, то на интервале $(0, 1)$ производная $f'(x) > 0$, поэтому на рассматриваемом промежутке $[0, 1]$ функция $f(x)$ строго возрастает. Следовательно, она не может принимать наименьшее значение в точке $x = 1$.

Предположим, что $p > 0$. Тогда знак производной $f'(x) = x(3x - 4p)$ изменяется с минуса на плюс при переходе через критическую точку $x = 4p/3$ и с плюса на минус при переходе через критическую точку $x = 0$. Следовательно, $x = 4p/3$ — точка минимума, а $x = 0$ — точка максимума.

Если $0 < 4p/3 < 1$, то наименьшее значение на промежутке $[0, 1]$ достигается функцией в точке минимума $x =$

$= 4p/3$, которая является внутренней точкой рассматриваемого промежутка. Если же $4p/3 \geq 1$, то на $(0, 1)$ производная $f'(x) < 0$, и, значит, функция f на $[0, 1]$ строго убывает.

В этом случае наименьшее значение на промежутке $[0, 1]$ она принимает в точке $x = 1$.

30. $a \leq -4/3$.

Решение. Для функции $f(x) = ax^3 + 4x + 1$ имеем $f'(x) = 3ax^2 + 4$. Если $a \geq 0$, то $f'(x) \geq 4 > 0$, поэтому функция строго монотонно возрастает, и на любом промежутке (в частности, на промежутке $[1, 2]$) она принимает наибольшее значение на правом конце промежутка. Следовательно, все неотрицательные значения параметра a не являются решениями задачи.

Далее, предположим, что $a < 0$. Тогда критическими точками для данной функции являются корни уравнения $3ax^2 + 4 = 0$, т.е. $x = \pm \sqrt{\frac{2}{-3a}}$. Очевидно, что для нас интересна только положительная критическая точка. Кроме того, полезно отметить, что при переходе через критическую точку $x_0 = \sqrt{\frac{2}{-3a}}$ производная $f'(x) = 3ax^2 + 4$ меняет знак с плюса на минус, поэтому точка x_0 является точкой локального максимума.

Дальнейшие рассуждения зависят от взаимного расположения точки x_0 и промежутка $[1, 2]$. Если $x_0 \leq 1$, то в интервале $(1, 2)$ производная $f'(x) < 0$, поэтому на промежутке $[1, 2]$ функция строго монотонно убывает и ее наибольшее значение достигается на левом конце промежутка.

Если $x_0 \geq 2$, то на $[1, 2]$ функция монотонно возрастает и наибольшее значение достигается на правом конце промежутка.

Наконец, если x_0 — внутренняя точка промежутка $[1, 2]$, то она является точкой наибольшего значения функции как единственная точка локального максимума в интервале $(1, 2)$.

Таким образом, при $a < 0$ решениями задачи будут только те значения параметра a , для которых $x_0 = \sqrt{\frac{2}{-3a}} \leq 1$, т.е. $4 \leq -3a$, откуда получаем, что $a \leq -4/3$.

$$31. \quad t = \frac{1}{4}.$$

Решение. Имеем

$$f(x) = 8t \cos x - \cos 2x + 4t - 8t^2 = -2(\cos x - 2t)^2 + 4t + 1,$$

поэтому наименьшее значение функции соответствует наибольшему значению выражения $(\cos x - 2t)^2$ на промежутке $[0, \pi/2]$, т.е. наибольшему значению функции $(y - 2t)^2$ на промежутке $[0, 1]$.

Если $2t \leq 1/2$, то наибольшее значение достигается на правом конце промежутка и равно $(1 - 2t)^2$. Если $2t > 1/2$, то наибольшее значение достигается на левом конце промежутка и равно $(-2t)^2$. Следовательно, при $t \leq 1/4$ получаем

$$f_{\min} = -2(1 - 2t)^2 + 4t + 1 = -2\left(2t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}.$$

Последнее выражение монотонно возрастает при $t \leq 1/4$ и достигает при $t = 1/4$ наибольшего значения, равного $3/2$. В то же время при $t \geq 1/4$ имеем

$$f_{\min} = -2(-2t)^2 + 4t + 1 = -2\left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.$$

Это выражение при $t = 1/4$ достигает наибольшего значения, равного $3/2$, на промежутке $[1/4, +\infty)$.

Таким образом, наибольшее из наименьших значений функции $f(x)$ достигается при $t = 1/4$ и равно $3/2$.

$$32. \quad t = -1/2.$$

Решение. Имеем

$$f(x) = 4t \sin x - \cos 2x + 2t^2 - 2t = 2(\sin x + t)^2 - 2t - 1,$$

поэтому наибольшее значение функции соответствует наибольшему значению $(\sin x + t)^2$ на промежутке $[0, \pi]$, т.е. наибольшему значению функции $(y + t)^2$ на промежутке $[0, 1]$, так как

$[0, 1]$ является множеством значений функции $y = \sin x$ на промежутке $[0, \pi]$.

Если $t \geq 0$, то на промежутке $[0, 1]$ функция $(y + t)^2$ строго возрастает и ее наибольшее значение, равное $(1 + t)^2$, достигается в точке $y = 1$. Если $t \leq -1$, то на промежутке $[0, 1]$ функция $(y + t)^2$ строго убывает, поэтому она принимает свое наибольшее значение, равное t^2 , в точке $y = 0$.

Если $-1 < t < 0$, то $y = -t \in (0, 1)$ является точкой минимума, поэтому наибольшее значение функции достигается на конце промежутка, т.е. при $y = 0$ или $y = 1$. Остается сравнить значения функции в этих точках. Но легко видеть, что $(1 + t)^2 \geq t^2$, если $t \geq -1/2$, и $(1 + t)^2 < t^2$, если $t < -1/2$.

Таким образом, доказано, что $f_{\max} = 2t^2 - 2t - 1$, если $t < -1/2$, и $f_{\max} = 2(1 + t)^2 - 2t - 1 = 2t^2 + 2t + 1$, если $t \geq -1/2$. Кроме того, оба квадратные трехчлены имеют общее значение, равное $1/2$, в точке $t = -1/2$. Учитывая, что квадратный трехчлен $2t^2 - 2t - 1$ является строго убывающей функцией при $t \leq -1/2$, а $2t^2 + 2t + 1$ — строго возрастающей при $t \geq -1/2$, получаем, что наименьшие значения квадратных трехчленов на соответствующих промежутках равны и достигаются при $t = -1/2$.

33. $a_3 > a_1 > a_2$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \log_{1/2} \sin 2x = -\log_2(2 \sin x \cos x) = \\ &= -1 - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x, \\ a_2 &= -1 - \log_2 \sin x, \\ a_3 &= \log_{1/2}(1 - \cos 2x) = -\log_2(2 \sin^2 x) = \\ &= -1 - 2 \log_2 \sin x. \end{aligned}$$

Следовательно, $a_2 - a_1 = \log_2 \cos x < 0$, т.е. $a_1 > a_2$. Кроме того, $a_1 - a_3 = \log_2 \sin x - \log_2 \cos x < 0$, так как в интервале $(0, \pi/4)$ справедливо неравенство $\cos x > \sin x$, а функция $y = \log_2 x$ монотонно возрастает. В результате получаем $a_3 > a_1$.

Объединяя полученные неравенства в соответствии с условием задачи, заключаем, что $a_3 > a_1 > a_2$.

34. $a_3 < a_2 < a_1$.

Решение. Имеем

$$a_1 = 1 + \log_2 \cos x,$$

$$a_2 = \log_2(1 + \cos 2x) = \log_2(2 \cos^2 x) = 1 + 2 \log_2 \cos x,$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 1 - 2 \log_{1/2} \sin 2x = 1 + 2 \log_2(2 \sin x \cos x) = \\ &= 3 + 2 \log_2 \sin x + 2 \log_2 \cos x. \end{aligned}$$

Следовательно, $a_2 - a_1 = \log_2 \cos x < 0$, т.е. $a_1 > a_2$. Кроме того,

$$\begin{aligned} a_2 - a_3 &= -2 - 2 \log_2 \sin x > -2 - 2 \log_2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -2 - 2 \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -2 + 2 = 0, \end{aligned}$$

так как для всех $x \in (0, \pi/6)$ справедливо неравенство $0 < \sin x < \sin(\pi/6) = 1/2$, а функция $y = \log_2 x$ монотонно возрастает. В результате получаем неравенство $a_2 > a_3$.

Объединяя полученные неравенства в соответствии с условием задачи, заключаем, что $a_3 < a_2 < a_1$.

35. $b = 7/16$.

Решение. Пусть $f(x) = |-2x^2 + x + b|$. Наибольшее значение этой функции достигается на одном из концов промежутка $[0, 1]$ или при $x = 1/4$, где $x = 1/4$ есть первая координата вершины параболы $y = -2x^2 + x + b$.

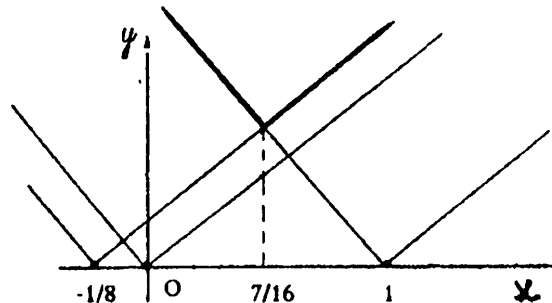


Рис. 11.

В зависимости от b необходимо выбрать наибольшее из трех чисел: $f(0) = |b|$, $f(1) = |b - 1|$, $f(1/4) = |1/8 + b|$

Это удобно сделать, построив графики функций от переменной b : $y = |b|$, $y = |b - 1|$, $y = |1/8 + b|$ (рис. 11). В результате получаем, что $f_{\max} = |1/8 + b|$ при $b \geq 7/16$ и $f_{\max} = |b - 1|$ при $b \leq 7/16$. Отсюда следует, что наименьшее значение величины f_{\max} достигается при $b = 7/16$.

36. $a = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = |x^2 + ax - 2|$. Наибольшее значение этой функции на промежутке $[-1, +1]$ достигается на одном из концов промежутка или при $x = -a/2$, где $x = -a/2$ — первая координата вершины параболы $y = x^2 + ax - 2$. Разумеется, что точку $x = -a/2$ мы должны рассматривать только в случае, когда она содержится внутри данного промежутка, т.е. $-2 < a < 2$.

Имеем $f(-1) = |a + 1|$, $f(1) = |a - 1|$. Легко убедиться в том, что при $a \geq 0$ наибольшим из чисел $|a + 1|$ и $|a - 1|$ является $|a + 1| = a + 1$, а при $a \leq 0$ наибольшим является $|a - 1| = 1 - a$.

Пусть $-2 < a < 2$. Так как $f(-a/2) = \left| \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 \right| = \frac{a^2}{4} + 2$, при $0 \leq a < 2$ необходимо сравнить два числа $|a + 1|$ и $\frac{a^2}{4} + 2$, а при $-2 < a \leq 0$ — два числа $|a - 1|$ и $\frac{a^2}{4} + 2$.

Если $0 \leq a < 2$, то $\left(\frac{a^2}{4} + 2 \right) - |a + 1| = \frac{a^2}{4} - a + 1 = \left(\frac{a}{2} - 1 \right)^2 > 0$, поэтому в данном случае справедливо неравенство $\frac{a^2}{4} + 2 > |a + 1|$.

Если $-2 < a \leq 0$, то аналогично доказывается неравенство $\frac{a^2}{4} + 2 > |a - 1| = 1 - a$.

Таким образом, доказано, что $f_{\max} = a + 1$, если $a \geq 2$, $f_{\max} = -a + 1$, если $a \leq -2$, и $f_{\max} = \frac{a^2}{4} + 2$, если $-2 < a < 2$.

Теперь из этих чисел берется наименьшее, равное 2 и соответствующее значению параметра $a = 0$.

$$37. a = \frac{47}{18}.$$

Решение. Рассмотрим на промежутке $[1, 8]$ функцию

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} - \left(a + \frac{5x}{9} - \frac{x^2}{9} \right)$$

и вычислим ее производную. Имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{9} + \frac{2}{9}x = \frac{3 - 5\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x^5}}{9\sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \frac{3 - 5z^2 + 2z^5}{9z^2}, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt[3]{x}$. Следовательно,

$$f'(x) = \frac{3 - 5z^2 + 2z^5}{9z^2} = \frac{(z - 1)^2(2z^3 + 4z^2 + 6z + 3)}{9z^2}.$$

Из последнего выражения для производной получаем неравенство $f'(x) \geq 0$ для всех $z \in [1, 2]$ или для всех $x \in [1, 8]$. Поэтому на промежутке $[1, 8]$ функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, и, значит, абсолютная погрешность $|f(x)|$ принимает наибольшее значение на одном из концов промежутка. В то же время

$$|f(8)| = \left| 2 - \left(a + \frac{40}{9} - \frac{64}{9} \right) \right| = \left| \frac{14}{3} - a \right|,$$

$$|f(1)| = \left| 1 - \left(a + \frac{5}{9} - \frac{1}{9} \right) \right| = \left| \frac{5}{9} - a \right|.$$

Из этих двух чисел следует взять наибольшее, а затем его минимизировать по параметру a . Для этого удобно рассмотреть две функции $y = \left| \frac{14}{3} - a \right|$ и $y = \left| \frac{5}{9} - a \right|$ от параметра a и исследовать их графики.

Из рис. 12 видно, что наибольшее значение абсолютной погрешности равно $\left| \frac{14}{3} - a \right|$ при $a \leq \frac{1}{2}(5/9 + 14/3) = 47/18$ и $\left| \frac{5}{9} - a \right|$ при $a \geq 47/18$. Поэтому его минимальное значение, равное $37/18$, достигается при $a = 47/18$.

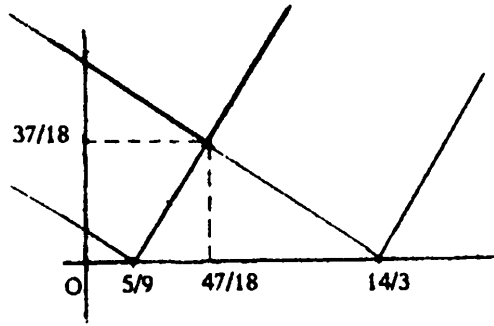


Рис. 12.

38. $b = 7/47$.

Решение. Рассмотрим на промежутке $[1, 4]$ функцию

$$f(x) = \sqrt{x} - b \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} \right) - (1 - b) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8}x - \frac{x^2}{64} \right)$$

и представим ее в следующем виде:

$$f(x) = bf_1(x) + (1 - b)f_2(x),$$

где $f_1(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8}$ и $f_2(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{x^2}{64}$.
Имеем

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{4} + \frac{x}{4} = \frac{2 - 3\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{4\sqrt{x}} = \frac{2 - 3z + z^3}{4z}, \\ f'_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{8} + \frac{x}{32} = \frac{16 - 12\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{32\sqrt{x}} = \\ &= \frac{16 - 12z + z^3}{32z}, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{x} \in [1, 2]$. Для таких z получаем

$$\begin{aligned} 2 - 3z + z^3 &= (z - 1)(z^2 + z - 2) \geq 0, \\ 16 - 12z + z^3 &= (z + 4)(z - 2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

поэтому $f'_1(x) \geq 0$, $f'_2(x) \geq 0$ для всех $x \in [1, 4]$, т.е. $f'(x) \geq 0$ на рассматриваемом промежутке.

Таким образом, для любых $b \in [0, 1]$ функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[1, 4]$, поэтому абсолютная погрешность $|f(x)|$ принимает наибольшее значение на одном из концов промежутка. В то же время имеем

$$|f(4)| = \left| 2 - b \left(\frac{3}{8} + 3 - 2 \right) - \right. \\ \left. - (1 - b) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) \right| = \frac{5}{8}b, \\ |f(1)| = \left| 1 - b \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \right) - \right. \\ \left. - (1 - b) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{64} \right) \right| = \frac{7}{64}(1 - b).$$

Из этих чисел следует взять наибольшее, а затем его минимизировать по параметру b . Так как равенство $\frac{5}{8}b = \frac{7}{64}(1 - b)$ выполняется для $b = 7/47$, получаем, что наибольшее из чисел равно $\frac{7}{64}(1 - b)$, если $0 \leq b \leq 7/47$, и равно $\frac{5}{8}b$, если $7/47 \leq b \leq 1$. Полученное максимальное значение погрешности минимально при $b = 7/47$ и равно $35/376$.

39. Наибольшее значение абсолютной погрешности равно 25.

Решение. Пусть $k < x \leq k + 1$ и $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трехчлен, для которого $f(0) = 0$, $f(k) = k^3$, $f(10) = 1000$. Тогда $c = 0$, а коэффициенты a и b являются решением линейной системы уравнений

$$\begin{cases} ak^2 + bk = k^3, \\ 100a + 10b = 1000. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a = k + 10$ и $b = -10k$. Поэтому квадратный трехчлен имеет вид $f(x) = (k + 10)x^2 - 10kx$.

Рассмотрим абсолютную величину погрешности:

$$y = |x^3 - f(x)| = |x^3 - (k+10)x^2 + 10kx| = x(x-k)(10-x).$$

Ее производная $y' = -3x^2 + 2(10+k)x - 10k$. Следовательно, критическую точку функции $y = x(x-k)(10-x)$ можно найти из уравнения $3x^2 - 2(10+k)x + 10k = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} x &= \frac{10+k \pm \sqrt{(10+k)^2 - 30k}}{3} = \\ &= \frac{10+k \pm \sqrt{k^2 - 10k + 100}}{3}. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\frac{10+k - \sqrt{k^2 - 10k + 100}}{3} < \frac{10+k - (10-k)}{3} = \frac{2k}{3} < k.$$

Поэтому второй корень расположен левее рассматриваемого промежутка $(k, k+1]$.

В зависимости от расположения первого корня квадратного уравнения относительно промежутка $[k, k+1]$ возможны два случая изображения графика функции $y = x(x-k)(10-x)$ (рис. 13).

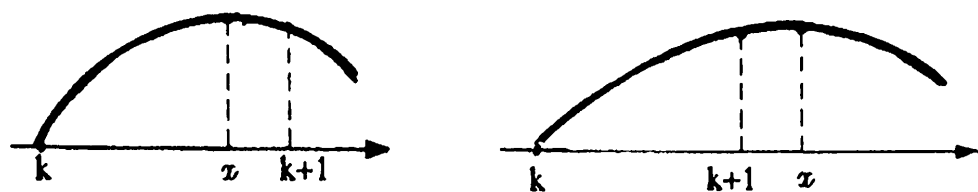


Рис. 13.

Первый корень $x = \frac{1}{3}(10+k + \sqrt{k^2 - 10k + 100})$ находим правее промежутка $[k, k+1]$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\frac{1}{3}(10+k + \sqrt{k^2 - 10k + 100}) > k+1,$$

т.е.

$$\sqrt{k^2 - 10k + 100} > 2k - 7.$$

Для $k = 1, 2, 3$ последнее неравенство справедливо, поскольку для таких k правая часть неравенства отрицательна. Для $k = 4, \dots, 9$ неравенство можно записать в следующем равносильном виде:

$$k^2 - 10k + 100 > 4k^2 - 28k + 49,$$

откуда получаем $3k^2 - 18k - 51 < 0$.

Квадратный трехчлен $3x^2 - 18x - 51$ имеет корни $\frac{9 \pm \sqrt{234}}{3}$, причем второй корень отрицательный, а для первого выполняется неравенство

$$8 < \frac{1}{3}(9 + \sqrt{234}) < \frac{25}{3} < 9,$$

так как $15 < \sqrt{234} < 16$.

Следовательно, для $k = 1, 2, \dots, 8$ наибольшее значение абсолютной погрешности на промежутке $(k, k+1]$ достигается на правом конце. Оно равно $(k+1)(9-k)$. Среди этих чисел наибольшим является число 25.

Наконец, наибольшее значение абсолютной погрешности на промежутке $(9, 10]$ достигается во внутренней точке

$$x = \frac{10 + 9 + \sqrt{81 - 90 + 100}}{3} = \frac{19 + \sqrt{91}}{3}$$

и равно числу

$$\begin{aligned} & \frac{19 + \sqrt{91}}{3} \left(\frac{19 + \sqrt{91}}{3} - 9 \right) \left(10 - \frac{19 + \sqrt{91}}{3} \right) = \\ & = \frac{1}{27} (19 + \sqrt{91})(\sqrt{91} - 8)(11 - \sqrt{91}) < \frac{29 \cdot 2 \cdot 2}{27} < 25. \end{aligned}$$

40. Наибольшее значение абсолютной погрешности равно $7/64$.

Решение. Пусть $(k-1)^2 \leq x < k^2$ и $f(x) = \sqrt{x} - \left(\frac{3}{8}k + \frac{3}{4k}x - \frac{x^2}{8k^3}\right)$. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{4k} + \frac{x}{4k^3} = \frac{2k^3 - 3k^2\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{4k^3\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2k^3 - 3k^2z + z^3}{4k^3z}, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{x} \in [k-1, k)$. Так как для любых $z \in [k-1, k)$

$$2k^3 - 3k^2z + z^3 = (z-k)^2(z+2k) \geq 0,$$

производная $f'(x) \geq 0$ на соответствующем промежутке, поэтому функция $y = f(x)$ монотонно возрастает. Отсюда заключаем, что наибольшее значение абсолютной погрешности достигается на одном из концов промежутка.

Имеем четыре функции, соответствующие значениям $k = 1, 2, 3, 4$:

$$f_1(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8} \quad (x \in [1/4, 1)),$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{4} - \frac{3}{8}x + \frac{x^2}{64} \quad (x \in [1, 4)),$$

$$f_3(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{216} \quad (x \in [4, 9)),$$

$$f_4(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{2} - \frac{3}{16}x + \frac{x^2}{512} \quad (x \in [9, 10]).$$

Прямым вычислением убеждаемся в том, что $f_1(1) = f_2(4) = f_3(9) = 0$, а $f_1(1/4) = -7/128$,

$f_2(1) = -7/64$, $f_3(4) = -11/216$, $f_4(9) = -5/512$. Здесь наибольшей из абсолютных величин этих чисел является $|f_2(1)| = 7/64$.

Это число необходимо сравнить с $|f_4(10)|$. Но $f_4(10) = \sqrt{10} - 407/128$, причем справедливо неравенство $-7/64 < \sqrt{10} - 407/128 < 0$, поэтому $|f_4(10)| < 7/64$.

Таким образом, наибольшее значение абсолютной погрешности для приближенного вычисления квадратного корня равно $7/64$.

ГЛАВА 4. ТРИГОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. $\{k\pi/3 : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. В результате последовательных преобразований получаем

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1,$$

$$\cos 4x - \cos 2x = 0, \quad -2 \sin x \sin 3x = 0.$$

Следовательно, $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$). Отметим, что множество решений уравнения $\sin 3x = 0$ содержит все решения уравнения $\sin x = 0$.

2. $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, 2k\pi, \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, уравнение можно записать в виде $2 \cos x (\sin x - \sin(x/2)) = 0$, поэтому $\cos x = 0$ или $\sin x - \sin(x/2) = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если же $\sin x - \sin(x/2) = 0$, то $2 \cos(3x/4) \sin(x/4) = 0$, поэтому $\cos(3x/4) = 0$ или $\sin(x/4) = 0$. Первое из двух последних уравнений дает $3x/4 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = 2\pi/3 + 4k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$), а второе — $x/4 = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = 4k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Объединяя эти решения, получаем $x = 2k\pi$ или $x = \pm 2\pi/3 + 4k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

3. $\{\arctg 3 + k\pi, \pi/4 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Так как $3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 2(1 + \sin 2x) = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x = \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$, данное уравнение можно записать в виде

$$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

Очевидно, что $\cos x \neq 0$ для каждого решения уравнения, поэтому после деления на $\cos^2 x$ получаем равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} x = 3$ или $\operatorname{tg} x = 1$. Если $\operatorname{tg} x = 3$, то $x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

4. $\{ \operatorname{arctg} 5 + k\pi, -\pi/4 + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}.$

Решение. Так как

$$\cos 2x + \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

и число 3 можно представить в виде $3 = 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x$, то данное уравнение можно записать в виде

$$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0.$$

Очевидно, что $\cos x \neq 0$ для каждого решения уравнения. Следовательно, после деления на $\cos^2 x$ обеих частей уравнения получим равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} x = 5$ или $\operatorname{tg} x = -1$. Если $\operatorname{tg} x = 5$, то $x = \operatorname{arctg} 5 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\operatorname{tg} x = -1$, то $x = -\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

5. $\{ k\pi, -\pi/4 + k\pi : k \in \mathbf{Z} \}.$

Решение. Отметим, что

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \right) = \frac{1}{2} (1 + \sin 2x),$$

поэтому

$$\cos^2 2x + 4 \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \cos^2 2x + (1 + \sin 2x)^2 = 2(1 + \sin 2x).$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$1 + \sin 2x = \cos 2x.$$

Однако, учитывая, что $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \sin(\pi/4 - 2x)$, имеем уравнение $\sin(\pi/4 - 2x) = 1/\sqrt{2}$, откуда $\pi/4 - 2x = \pi/4 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $\pi/4 - 2x = -\pi/4 + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = -\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$6. \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $2 \cos^2 3x = 1 + \cos 6x$, то $4 \cos^4 3x = (1 + \cos 6x)^2 = 1 + 2 \cos 6x + \cos^2 6x$, поэтому правая часть уравнения

$$\begin{aligned} \sin^2 6x + 4 \cos^4 3x &= \sin^2 6x + 1 + 2 \cos 6x + \cos^2 6x = \\ &= 2(1 + \cos 6x). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\sin 6x = 1 + \cos 6x.$$

Однако, учитывая, что $\sin 6x - \cos 6x = \sin 6x - \sin(\pi/2 - 6x) = 2 \cos(\pi/4) \sin(6x - \pi/4) = \sqrt{2} \sin(6x - \pi/4)$, имеем уравнение $\sin(6x - \pi/4) = 1/\sqrt{2}$, откуда $6x - \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $6x - \pi/4 = -\pi/4 + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/12 + k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = \pi/6 + k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$7. \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате последовательных преобразований находим

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos x &= \cos^2 2x - \sin^2 2x, \\ 2 \cos 4x \cos 3x &= \cos 4x, \\ \cos 4x(1 - 2 \cos 3x) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\cos 4x = 0$ или $\cos 3x = 1/2$. Если $\cos 4x = 0$, то $4x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/8 + k\pi/4$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если же $\cos 3x = 1/2$, то $3x = \pm\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pm\pi/9 + 2k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$).

8. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Уравнение запишем в виде

$$\sin 3x + \sin x = \cos x.$$

Здесь левая часть уравнения $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$, поэтому получаем уравнение $\cos x(1 - 2 \sin 2x) = 0$.

Следовательно, $\cos x = 0$ или $\sin 2x = 1/2$. Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\sin 2x = 1/2$, то $2x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = (-1)^k \pi/12 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

9. $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Так как $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, получаем уравнение $\cos 2x + \cos 4x = 0$, откуда

$$2 \cos 3x \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\cos 3x = 0$, то $3x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), поэтому $x = \pi/6 + k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Отметим также, что решения уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди решений уравнения $\cos 3x = 0$, так как

$$\frac{\pi}{6} + \frac{(3k+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

10. $\left\{ \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Так как $1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, уравнение можно записать в виде $\cos 2x = \cos 6x$.

Учитывая, что $\cos 6x - \cos 2x = 2 \sin 4x \sin 2x$, получаем $\sin 4x = 0$ или $\sin 2x = 0$. Если $\sin 4x = 0$, то $4x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), поэтому $x = \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\sin 2x = 0$, то $2x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Очевидно, что решения уравнения $\sin 2x = 0$ содержатся среди решений уравнения $\sin 4x = 0$.

11. $\{k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\sin x \left(2 \cos x - \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \right) = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Рассмотрим второе уравнение

$$2 \cos x - \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 0,$$

т.е.

$$2 \cos x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0,$$

$$\frac{3}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0, \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

откуда получаем $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

12. $\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Так как $\cos 2x + \sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \right),$$

то данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \right),$$

откуда следует, что

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right).$$

Учитывая, что

$$\cos 2x - \cos(\pi/3 - 2x) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin(2x - \pi/6),$$

из последнего уравнения имеем $\sin(2x - \pi/6) = 0$.

Таким образом, $2x - \pi/6 = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, т.е. $x = \pi/12 + k\pi/2 \quad (k \in \mathbf{Z})$.

13. $\{(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. В результате преобразований имеем

$$\frac{1 - \cos(\pi/6 + 2x)}{2} + \frac{1 + \cos(\pi/6 - 2x)}{2} = \frac{5}{4},$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{2},$$

$$2 \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x = \frac{1}{2}, \quad \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, поэтому $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z})$.

14. $\{\pm \frac{\pi}{8} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right) = \frac{3}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1,$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x = 1, \quad \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $2x = \pm \pi/4 + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, т.е. $x = \pm \pi/8 + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

$$15. \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\sin^3 x + \sin 3x = \sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \cos^2 x \sin x$, данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\cos x \sin x = -3 + 5 \cos^2 x.$$

Очевидно, что $\cos x \neq 0$ для каждого решения уравнения, поэтому после деления на $\cos^2 x$ получим равносильное уравнение

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{\cos^2 x} + 5,$$

т.е. $\operatorname{tg} x = -3(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 5$, и, следовательно, $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

В результате для новой неизвестной $z = \operatorname{tg} x$ получаем квадратное уравнение $3z^2 + z - 2 = 0$, поэтому $z = -1$ или $z = 2/3$.

Таким образом, $x = -\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$16. \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos^3 x - \cos 3x = \cos^3 x - 4 \cos^3 x + 3 \cos x = 3(\cos x - \cos^3 x) = 3 \cos x \sin^2 x$ и $1 + 5 \cos 2x = 1 + 5(2 \cos^2 x - 1) = -4 + 10 \cos^2 x = 2(-2 + 5 \cos^2 x)$, то данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\cos x \sin x = -2 + 5 \cos^2 x.$$

Из этого уравнения видно, что $\cos x \neq 0$ для всех решений уравнения, поэтому после деления на $\cos^2 x$ получаем равносильное уравнение

$$\operatorname{tg} x = -2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 5.$$

Следовательно, для новой неизвестной $z = \operatorname{tg} x$ имеем квадратное уравнение $2z^2 + z - 3 = 0$, откуда $z = 1$ или $z = -3/2$.

В результате получаем решения исходного уравнения: $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) и $x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$17. \left\{ \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Пусть $y = \pi/6 - x$. Тогда $x = \pi/6 - y$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3y \right) = \sin 3y = 3 \cos^2 y \sin y - \sin^3 y, \\ \sin 3x &= \cos 3y = \cos^3 y - 3 \sin^2 y \cos y. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем равносильные уравнения:

$$\begin{aligned} &(3 \cos^2 y \sin y - \sin^3 y) \cos^3 y + \\ &+ (\cos^3 y - 3 \sin^2 y \cos y) \sin^3 y = \frac{3}{4}, \\ 3 \sin y \cos y (\cos^4 y - \sin^4 y) &= \frac{3}{4}, \quad \sin y \cos y \cos 2y = \frac{1}{4}, \\ \sin 2y \cos 2y &= \frac{1}{2}, \quad \sin 4y = 1. \end{aligned}$$

В результате имеем $4y = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $y = \pi/8 + k\pi/2$, откуда $x = \pi/24 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$18. \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Пусть $y = x + \pi/6$. Тогда $x = y - \pi/6$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos \left(3y - \frac{\pi}{2} \right) = \sin 3y, \\ \sin 3x &= \sin \left(3y - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos 3y. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\sin 3y \sin^3 y + \cos 3y \cos^3 y = -\frac{1}{8}.$$

В результате преобразований имеем

$$\frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 4y) \sin^2 y + \frac{1}{2}(\cos 2y + \cos 4y) \cos^2 y = -\frac{1}{8},$$

$$\cos 2y + \cos 4y(\cos^2 y - \sin^2 y) = -\frac{1}{4},$$

$$\cos 2y(1 + \cos 4y) = -\frac{1}{4},$$

$$2 \cos^3 2y = -\frac{1}{4}, \quad \cos^3 2y = -\frac{1}{8}.$$

Таким образом, $\cos 2y = -1/2$ и $2y = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $y = \pm \pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Отсюда получаем, что $x = y - \pi/6 = (\pi/3 - \pi/6) + k\pi = \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = -\pi/3 - \pi/6 + k\pi = -\pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$19. \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 2 \cos^2 x + \cos x = (2 \cos x + 1) \cos x,$$

$$\cos 2x - \cos x = 2 \cos^2 x - \cos x - 1 =$$

$$= (2 \cos x + 1)(\cos x - 1),$$

получаем равносильное уравнение

$$(2 \cos x + 1)^2 \cos^2 x = 2(2 \cos x + 1)^2 (\cos x - 1),$$

поэтому

$$(2 \cos x + 1)^2 (\cos^2 x - 2 \cos x + 2) = 0.$$

Если $2 \cos x + 1 = 0$, то $\cos x = -1/2$, поэтому $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Наконец, рассмотрим уравнение $\cos^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$. Для новой неизвестной $z = \cos x$ получаем квадратное уравнение $z^2 - 2z + 2 = 0$, которое не имеет действительных решений, так как дискриминант квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac = -4 < 0$.

$$20. \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \sin x + \cos 2x &= \sin x + 1 - 2\sin^2 x = \\ &= -(2\sin x + 1)(\sin x - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos 2x - 1 &= 2(1 - 2\sin^2 x) - 1 = \\ &= 1 - 4\sin^2 x = (1 + 2\sin x)(1 - 2\sin x), \end{aligned}$$

данное уравнение можно записать в виде

$$2(2\sin x + 1)^2(\sin x - 1)^2 = (2\sin x + 1)^2(1 - 2\sin x),$$

поэтому

$$(2\sin x + 1)^2(2(\sin x - 1)^2 - 1 + 2\sin x) = 0,$$

т.е.

$$(2\sin x + 1)^2(2\sin^2 x - 2\sin x + 1) = 0.$$

Если $2\sin x + 1 = 0$, то $\sin x = -1/2$, поэтому $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Наконец, уравнение $2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ не имеет решений, так как

$$2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = \sin^2 x + (\sin x - 1)^2 \geq 0,$$

где $\sin x$ и $\sin x - 1$ не могут одновременно обращаться в нуль.

$$21. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований последовательно получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} 5\sin 2x + (\cos 3x + \cos x) + 4\cos x &= 0, \\ 10\sin x \cos x + 2\cos 2x \cos x + 4\cos x &= 0, \\ 2\cos x(5\sin x + \cos 2x + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если же $5 \sin x + \cos 2x + 2 = 0$, то $5 \sin x - 2 \sin^2 x + 3 = 0$, поэтому для новой неизвестной $z = \sin x$ имеем квадратное уравнение $2z^2 - 5z - 3 = 0$. Следовательно,

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}, \text{ т.е. } z = 3 \text{ или } z = -\frac{1}{2}.$$

Здесь $z = 3$ – постороннее решение. Но если $z = \sin x = -1/2$, то $x = (-1)^k \arcsin(-1/2) + k\pi = (-1)^{k+1} \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$22. \{k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Решение. В результате преобразований последовательно получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} 7 \sin 2x + (\sin 3x - \sin x) - 6 \sin x &= 0, \\ 14 \sin x \cos x + 2 \cos 2x \sin x - 6 \sin x &= 0, \\ \sin x(7 \cos x + \cos 2x - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\sin x = 0$, то $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Если же $7 \cos x + \cos 2x - 3 = 0$, то $7 \cos x + 2 \cos^2 x - 4 = 0$. Следовательно, для новой переменной $z = \cos x$ имеем квадратное уравнение $2z^2 + 7z - 4 = 0$, поэтому

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}, \text{ т.е. } z = -4 \text{ или } z = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что $z = -4$ является посторонним решением. Если же $z = \cos x = 1/2$, то $x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$23. \{2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\sin^2 x + 3 \sin x + 2 = 2 \cos x$$

и возведем в квадрат обе его части. Тогда получим уравнение

$$\sin^4 x + 9 \sin^2 x + 4 + 6 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 12 \sin x = 4 \cos^2 x.$$

В результате преобразований найдем

$$\begin{aligned}\sin^4 x + 9 \sin^2 x + 4 \sin^2 x + 6 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 12 \sin x &= 0, \\ \sin^4 x + 6 \sin^3 x + 17 \sin^2 x + 12 \sin x &= 0, \\ \sin x(\sin^3 x + 6 \sin^2 x + 17 \sin x + 12) &= 0, \\ \sin x(\sin x + 1)(\sin^2 x + 5 \sin x + 12) &= 0.\end{aligned}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $z^2 + 5z + 12$ отрицательный ($D = 25 - 48 = -23$), поэтому уравнение $\sin^2 x + 5 \sin x + 12 = 0$ не имеет решений. Если $\sin x = 0$, то, подставляя это значение синуса в исходное уравнение, получаем $2(\cos x - 1) = 0$, откуда $\cos x = 1$. Тогда из уравнений $\sin x = 0$ и $\cos x = 1$ находим $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\sin x + 1 = 0$, то $-2 = 2(\cos x - 1)$, поэтому $\cos x = 0$. Таким образом, $\sin x = -1$ и $\cos x = 0$, т.е. $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

24. $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 3 \sin x$$

и возведем в квадрат обе его части. Тогда получим уравнение

$$4 \cos^4 x + 25 \cos^2 x + 9 - 20 \cos^3 x + 12 \cos^2 x - 30 \cos x = 9 \sin^2 x.$$

В результате преобразований найдем

$$\begin{aligned}4 \cos^4 x + 37 \cos^2 x + 9(1 - \sin^2 x) - 20 \cos^3 x - 30 \cos x &= 0, \\ 4 \cos^4 x - 20 \cos^3 x + 46 \cos^2 x - 30 \cos x &= 0, \\ 2 \cos x(2 \cos^3 x - 10 \cos^2 x + 23 \cos x - 15) &= 0, \\ 2 \cos x(\cos x - 1)(2 \cos^2 x - 8 \cos x + 15) &= 0.\end{aligned}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $2z^2 - 8z + 15$ отрицательный ($D = 64 - 120 = -56$), поэтому уравнение $2 \cos^2 x - 8 \cos x + 15 = 0$ не имеет решений. Если $\cos x = 0$, то, подставляя это значение косинуса в исходное уравнение,

получаем $3(\sin x - 1) = 0$, поэтому $\sin x = 1$. Тогда из уравнений $\cos x = 0$ и $\sin x = 1$ находим $x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\cos x - 1 = 0$, то $\cos x = 1$, поэтому из исходного уравнения имеем $-3 = 3(\sin x - 1)$, т.е. $\sin x = 0$. Но совместное решение уравнений $\cos x = 1$ и $\sin x = 0$ есть $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$25. \left\{ \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{19}} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \cos^6 x + \sin^6 x &= \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \\ &= \cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - \\ &\quad - 3 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное уравнение можно записать в виде

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{4}{19},$$

поэтому $\sin^2 2x = 4/19$, $\sin 2x = \pm 2/\sqrt{19}$, т.е.

$$x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{19}} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

$$26. \left\{ \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) &= \\ &= \frac{1}{2}[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] = \\ &= \frac{1}{2} - \sin^2 x \cos^2 x. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное уравнение можно записать в виде

$$1 = 2 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x \cos^2 x,$$

т.е.

$$\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0.$$

В результате для новой неизвестной $z = \sin 2x$ имеем квадратное уравнение $z^2 + z - 1 = 0$, откуда $z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Здесь решение $z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ является посторонним, так как оно по абсолютной величине больше 1. Если же $z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, то

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

27. $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x),$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 1 + \cos 6x,$$

$$2 \cos 3x \cos x = 2 \cos^2 3x,$$

$$\cos 3x (\cos x - \cos 3x) = 0.$$

Если $\cos 3x = 0$, то $3x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), поэтому $x = \pi/6 + k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\cos x - \cos 3x = 0$, то $2 \sin 2x \sin x = 0$. Следовательно, $2x = k\pi$ или $x = k\pi$, т.е. $x = k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$), так как решения $x = k\pi$ уже содержатся среди решений уравнения $\sin 2x = 0$.

Отметим также, что решения $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) принадлежат множеству решений уравнения $\cos 3x = 0$.

$$28. \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как левая часть уравнения

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{13x}{2} \right) &= \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 3x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 13x) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 13x - \cos 3x), \end{aligned}$$

а правая —

$$\cos 7x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 13x + \cos x),$$

исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{1}{2}(\cos 13x - \cos 3x) = \frac{1}{2}(\cos 13x + \cos x),$$

откуда получаем $\cos 3x + \cos x = 0$. Следовательно,

$$2 \cos 2x \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\cos 2x = 0$, то $2x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/4 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$29. \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos x \neq 0$, после деления на $\cos x$ числителя и знаменателя дроби в левой части уравнения получаем равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 3} = 0.$$

Тогда для новой неизвестной $y = \operatorname{tg} x$ имеем уравнение

$$y^2 + \frac{1 - 3y}{y - 3} = 0,$$

поэтому $y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0$, т.е. $(y + 1)(y^2 - 4y + 1) = 0$.

Если $y + 1 = 0$, то $y = \operatorname{tg} x = -1$, поэтому $x = -\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $y^2 - 4y + 1 = 0$, то $y = \operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}$, т.е. $x = \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Отметим, что второе решение можно представить в другом виде. Действительно, из уравнения $y^2 + 1 = 4y$ имеем $\frac{1}{\cos^2 x} = 4 \operatorname{tg} x$, поэтому $1 = 4 \cos x \sin x$, т.е. $\sin 2x = 1/2$. В результате находим решения $x = (-1)^k \pi/12 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$30. \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Записав данное уравнение в виде

$$\sin x \cos x (\sin x + 3 \cos x) = \sin^3 x + 3 \cos^3 x$$

и разделив обе части последнего уравнения на $\cos^3 x$, получим уравнение

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 3) = \operatorname{tg}^3 x + 3.$$

Следовательно, для новой неизвестной $y = \operatorname{tg} x$ имеем $y^3 - y^2 - 3y + 3 = 0$, т.е. $(y - 1)(y^2 - 3) = 0$.

Если $y - 1 = 0$, то $y = \operatorname{tg} x = 1$, поэтому $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $y^2 - 3 = 0$, то $y = \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, т.е. $x = \pm\pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Легко убедиться в том, что среди полученных решений нет посторонних. Например, нетрудно проверить, что для всех решений x знаменатель дроби в правой части данного уравнения $\sin x + 3 \cos x \neq 0$. Кроме того, $\cos x \neq 0$ для всех решений уравнения, поэтому при делении на $\cos^3 x$ получили уравнение, равносильное исходному.

$$31. \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$, $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$, то данное уравнение равносильно уравнениям

$$\begin{aligned} \sin^3 x (\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x) + \\ + \cos^3 x (3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x) = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$\cos x \sin x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \frac{1}{4},$$

$$\cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4},$$

$$\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}, \quad \sin 4x = 1.$$

Следовательно, $4x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/8 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$32. \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Данное уравнение запишем в виде

$$2 \sin x \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 5 \sin^2 x$$

и разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Здесь необходимо отметить, что $\cos x \neq 0$ для всех решений уравнения, поэтому следующее уравнение равносильно исходному:

$$2 \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x + 5 - 5 \operatorname{tg}^2 x.$$

В результате для новой неизвестной $y = \operatorname{tg} x$ получаем квадратное уравнение $4y^2 + 2y - 6 = 0$, откуда $y = 1$ или $y = -3/2$.

Если $y = \operatorname{tg} x = 1$, то $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$); если же $y = \operatorname{tg} x = -3/2$, то $x = k\pi - \operatorname{arctg} (3/2)$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$33. \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований из исходного уравнения получаем равносильные уравнения

$$\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right) = \cos 2x,$$

$$1 + \frac{1}{2}(-\sin 2x - \sin 2x) = \cos 2x,$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 1, \quad \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\pi/4 + 2x = (-1)^k \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $\pi/4 + 2x = \pi/4 + 2k\pi$ или $\frac{\pi}{4} + 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi$, поэтому $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$34. \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований из данного уравнения получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right) = \\ = \sqrt{3} \cos 2x, \end{aligned}$$

$$1 + \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2x) = \sqrt{3} \cos 2x,$$

$$1 + \sin 2x = \sqrt{3} \cos 2x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}, \quad \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно $\pi/3 - 2x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $\pi/3 - 2x = \pi/6 + 2k\pi$ или $\pi/3 - 2x = -\pi/6 + (2k+1)\pi$. Отсюда следует, что $x = \pi/12 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = -\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$35. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\begin{aligned} (\cos x - \cos 3x) - 3 \cos 2x &= 3, \\ 2 \sin 2x \sin x &= 3(1 + \cos 2x), \\ 4 \sin^2 x \cos x &= 6 \cos^2 x, \\ \cos x(2 \sin^2 x - 3 \cos x) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\cos x \neq 0$, то $2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x = 0$, т.е. $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$. Следовательно, для новой переменной $z = \cos x$ имеем квадратное уравнение $2z^2 + 3z - 2 = 0$, откуда $z = -2$ или $z = 1/2$.

Очевидно, что $z = -2$ является посторонним решением, так как $|\cos x| \leq 1$. Если же $z = \cos x = 1/2$, то $x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$36. \left\{ k\pi, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим уравнениям

$$\begin{aligned} 3(\cos 2x - 1) &= \sin x + \sin 3x, \\ -6 \sin^2 x &= 2 \sin 2x \cos x, \\ \sin x(2 \cos^2 x + 3 \sin x) &= 0, \\ \sin x(2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\sin x = 0$, то $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$, то для новой неизвестной $z = \sin x$ получаем квадратное уравнение $2z^2 - 3z - 2 = 0$. Следовательно, $z = 2$ или $z = -1/2$.

Очевидно, что $z = 2$ — постороннее решение, так как $|\sin x| \leq 1$. Если же $z = \sin x = -1/2$, то $x = (-1)^{k+1} \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$37. \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} 7 - 3 \operatorname{tg}^2 x - 6(2 \cos^2 x - 1) &= 4 \cos^2 x, \\ 13 - 3 \operatorname{tg}^2 x &= 16 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Так как $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, для новой переменной $z = \operatorname{tg}^2 x$ имеем уравнение $13 - 3z = \frac{16}{1+z}$, откуда $(13 - 3z)(1 + z) = 16$, поэтому $3z^2 - 10z + 3 = 0$. Следовательно, $z = 3$ или $z = 1/3$.

Если $z = \operatorname{tg}^2 x = 3$, то $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, поэтому $x = \pm\pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $z = \operatorname{tg}^2 x = 1/3$, то $\operatorname{tg} x = \pm 1/\sqrt{3}$ и $x = \pm\pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$38. \left\{ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \pm\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} 3\operatorname{tg}^2 x + 2(1 - 2\sin^2 x) - 1 &= 4\sin^2 x, \\ 3\operatorname{tg}^2 x - 8\sin^2 x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, имеем для новой неизвестной $z = \operatorname{tg}^2 x$ уравнение

$$3z - \frac{8z}{1+z} + 1 = 0,$$

поэтому $3z(1+z) - 8z + (1+z) = 0$. Следовательно, z является решением квадратного уравнения $3z^2 - 4z + 1 = 0$, т.е. $z = 1$ или $z = 1/3$.

Если $z = \operatorname{tg}^2 x = 1$, то $\operatorname{tg} x = \pm 1$, поэтому $x = \pm\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $z = \operatorname{tg}^2 x = 1/3$, то $\operatorname{tg} x = \pm 1/\sqrt{3}$, поэтому $x = \pm\pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$39. \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, из данного уравнения находим $\operatorname{tg}^2 x - \frac{20}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 2 = 0$, поэтому $z - \frac{20}{1+z} + 2 = 0$ для новой неизвестной $z = \operatorname{tg}^2 x$. Следовательно, $z^2 + 3z - 18 = 0$, откуда $z = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{9 + 72}) = \frac{1}{2}(-3 \pm 9)$, т.е. $z = 3$ или $z = -6$.

Очевидно, что $z = -6$ является посторонним решением. Если же $z = 3$, то $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, поэтому $x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{3} + k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$40. \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, данное уравнение можно записать в виде $3 \operatorname{tg}^2 x + \frac{4 \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 2 = 0$, т.е. $3z + \frac{4z}{1+z} - 2 = 0$, где $z = \operatorname{tg}^2 x$. Следовательно, для определения новой неизвестной z имеем уравнение $3z(1+z) + 4z - 2(1+z) = 0$, откуда получаем квадратное уравнение $3z^2 + 5z - 2 = 0$.

Таким образом, $z = -2$ или $z = 1/3$, причем решение $z = -2$ является посторонним, так как $z = \operatorname{tg}^2 x \geq 0$. Если же $z = \operatorname{tg}^2 x = 1/3$, то $\operatorname{tg} x = \pm 1/\sqrt{3}$, поэтому $x = \pm \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$41. \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и $\cos^2 5x = \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)$, данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 10x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \cos 6x = 1,$$

откуда в результате преобразований получаем равносильные уравнения

$$\cos 10x + \cos 2x + 2 \cos 6x = 0,$$

$$2 \cos 6x \cos 4x + 2 \cos 6x = 0,$$

$$\cos 6x (\cos 4x + 1) = 0.$$

Следовательно, $\cos 6x = 0$ или $\cos 4x = -1$. Если $\cos 6x = 0$, то $6x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/12 + k\pi/6$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\cos 4x = -1$, то $4x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/4 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Отметим, что

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} : k \in \mathbf{Z} \right\} = \\ = \left\{ \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\},$$

поэтому решения уравнения $\cos 4x = -1$ содержатся в множестве решений уравнения $\cos 6x = 0$.

$$42. \left\{ \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 10x) = \sin 4x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 10x) = \sin 4x.$$

Кроме того, поскольку $\cos 2x - \cos 10x = 2 \sin 6x \sin 4x$, имеем уравнение $\sin 6x \sin 4x = \sin 4x$, т.е. $\sin 4x(\sin 6x - 1) = 0$.

Если $\sin 4x = 0$, то $4x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), поэтому $x = k\pi/4$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если же $\sin 6x - 1 = 0$, то $\sin 6x = 1$, поэтому $6x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/12 + k\pi/3$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Из последнего множества решений выделим три подмножества, соответствующие целым числам вида $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$: $x_1 = \pi/12 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $x_2 = (\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) + k\pi = 5\pi/12 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) и $x_3 = (\pi/12 + 2\pi/3) + k\pi = 3\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Очевидно, что третья группа решений содержится в множестве решений вида $x = k\pi/4$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$43. \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} \sin 2x - \sin x &= \sin 4x(2 \cos x - 1), \\ 2 \sin x \cos x - \sin x &= \sin 4x(2 \cos x - 1), \\ (2 \cos x - 1)(\sin 4x - \sin x) &= 0. \end{aligned}$$

Если $2 \cos x - 1 = 0$, то $\cos x = 1/2$, поэтому $x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Если $\sin 4x - \sin x = 0$, то $2 \cos \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0$, поэтому $\cos \frac{5x}{2} = 0$ или $\sin \frac{3x}{2} = 0$.

Если $\cos \frac{5x}{2} = 0$, то $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, т.е. $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi/5$ ($k \in \mathbb{Z}$). Если же $\sin \frac{3x}{2} = 0$, то $\frac{3x}{2} = k\pi$, поэтому $x = 2k\pi/3$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$44. \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} \cos 5x(1 + 2 \sin x) &= \sin 2x + \cos x, \\ \cos 5x(1 + 2 \sin x) &= \cos x(2 \sin x + 1), \\ (\cos 5x - \cos x)(1 + 2 \sin x) &= 0. \end{aligned}$$

Если $1 + 2 \sin x = 0$, то $\sin x = -1/2$, поэтому $x = (-1)^{k+1} \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Если $\cos 5x - \cos x = 0$, то $2 \sin 3x \sin 2x = 0$, поэтому $\sin 3x = 0$ или $\sin 2x = 0$.

Если $\sin 3x = 0$, то $3x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), т.е. $x = k\pi/3$ ($k \in \mathbb{Z}$). Если же $\sin 2x = 0$, то $x = k\pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Отметим, что из последней группы решений достаточно оставить только решения вида $x = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), так как решения $x = 2k\pi/2 = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) уже содержатся в множестве решений уравнения $\sin 3x = 0$.

$$45. \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. Из данного уравнения последовательно получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned}
-2 \cos 2x &= \cos^2 2x + (1 - \cos(2x - \pi/2))^2, \\
-2 \cos 2x &= \cos^2 2x + (1 - \sin 2x)^2, \\
-2 \cos 2x &= \cos^2 2x + 1 - 2 \sin 2x + \sin^2 2x, \\
-2 \cos 2x &= 2 - 2 \sin 2x, \\
\sin 2x - \cos 2x &= 1, \\
\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $2x - \pi/4 = (-1)^k \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ или $2x - \pi/4 = -\pi/4 + (2k+1)\pi$, откуда $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$46. \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Из данного уравнения последовательно получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 2x + \sin^2 2x &= 1 + \left(1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2, \\
\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 2x + \sin^2 2x &= 1 + (1 - \sin 2x)^2, \\
\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 2x &= 2 - 2 \sin 2x, \quad \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\pi/6 + 2x = (-1)^k \pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $\pi/6 + 2x = \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $\pi/6 + 2x = -\pi/3 + (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Отсюда получаем, что $x = \pi/12 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$47. \left\{ \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{6}, -\frac{\pi}{66} + \frac{k\pi}{11} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Данное уравнение можно записать в виде $\sin 17x + \sin(\pi/3 + 5x) = 0$ или $\sin 17x = \sin(-\pi/3 - 5x)$. Следовательно, $17x + (-\pi/3 - 5x) = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $17x - (-\pi/3 - 5x) = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). В первом случае получаем, что $12x = \pi/3 + (2k+1)\pi$ и, значит, $x = \pi/9 + k\pi/6$

($k \in \mathbf{Z}$). Во втором случае мы имеем соотношение $22x = -\pi/3 + 2k\pi$, откуда $x = -\pi/66 + k\pi/11$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$48. \left\{ \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{108} + \frac{k\pi}{9} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Данное уравнение можно записать в виде $\sin 11x + \sin(\pi/6 + 7x) = 0$ или $\sin 11x = \sin(-\pi/6 - 7x)$. Следовательно, $11x + (-\pi/6 - 7x) = (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $11x - (-\pi/6 - 7x) = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). В первом случае получаем, что $4x = 7\pi/6 + 2k\pi$ и, значит, $x = 7\pi/24 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$). Во втором случае мы имеем соотношение $18x = -\pi/6 + 2k\pi$, откуда $x = -\pi/108 + k\pi/9$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$49. \left\{ \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Рассмотрим новую неизвестную $y = \sin x + \cos x$. Тогда $y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$, поэтому $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$. Следовательно, данное уравнение можно записать в виде

$$y + \frac{2(1 + y)}{y^2 - 1} = \frac{32}{5}.$$

Теперь в результате преобразований получаем

$$y + \frac{2}{y - 1} = \frac{32}{5},$$

$$5(y(y - 1) + 2) = 32(y - 1), \quad 5y^2 - 37y + 42 = 0,$$

поэтому

$$y = \frac{37 \pm \sqrt{529}}{10} = \frac{37 \pm 23}{10}, \text{ т.е. } y = 6 \text{ или } y = \frac{7}{5}.$$

Очевидно, что $|y| = |\sin x + \cos x| \leq 2$, поэтому $y = 6$ является посторонним решением. Если же $\sin x + \cos x = 7/5$, то $\cos(x - \pi/4) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, поэтому $x - \pi/4 = \pm \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Таким образом, $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$50. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{9-\sqrt{61}}{10} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$, уравнение можно записать в виде

$$4(\cos 2x + 1)^2 = 5(\cos^3 2x + 1).$$

Если $\cos 2x + 1 = 0$, то $\cos 2x = -1$, поэтому $2x = (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если $\cos 2x + 1 \neq 0$, то после деления обеих частей уравнения на $\cos 2x + 1$ получаем уравнение

$$4(\cos 2x + 1) = 5(\cos^2 2x - \cos 2x + 1),$$

$$\text{т.е. } 5 \cos^2 2x - 9 \cos 2x + 1 = 0.$$

Таким образом, для новой неизвестной $y = \cos 2x$ имеем квадратное уравнение $5y^2 - 9y + 1 = 0$, поэтому

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 20}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{10}.$$

Здесь решение $y = \frac{9+\sqrt{61}}{10}$ является посторонним, так как $\frac{9+\sqrt{61}}{10} > 1$, а $|y| = |\cos 2x| \leq 1$. В то же время нетрудно убедиться в том, что $0 < \frac{9-\sqrt{61}}{10} < 1$. В результате получаем $y = \cos 2x = \frac{9-\sqrt{61}}{10}$, поэтому $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{9-\sqrt{61}}{10} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$51. \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований находим равносильные уравнения

$$(\sin 5x + \sin x) + (\cos 2x - \cos 6x) + \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 3x \cos 2x + 2 \sin 4x \sin 2x + \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x(2 \sin 3x + 4 \sin^2 2x + 1) = 0,$$

$$\cos 2x \left(\sin 3x - \cos 4x + \frac{3}{2} \right) = 0.$$

Если $\cos 2x = 0$, то $2x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), поэтому $x = \pi/4 + k\pi/2$. Учитывая, что $x \in [\pi, 2\pi]$, получаем решения $x = 5\pi/4$ и $x = 7\pi/4$.

Если $\cos 2x \neq 0$, то после сокращения на $\cos 2x$ имеем уравнение

$$\cos 4x - \sin 3x = \frac{3}{2}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos 4x - \sin 3x &= \cos 4x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) = \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

последнее уравнение сводится к уравнению

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Если $x \in [\pi, 2\pi]$, то $3\pi/4 \leq \pi/4 + x/2 \leq 5\pi/4$, поэтому справедливо неравенство

$$\left| \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а из уравнения получаем

$$\left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4} \right) \right| \geq \frac{3}{4}\sqrt{2} > 1.$$

Таким образом, последнее уравнение не имеет решений в промежутке $[\pi, 2\pi]$.

52. $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Решение. В результате преобразований последовательно получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} (\cos 3x - \cos 7x) - (\sin 6x + \sin 2x) - \sin 2x &= 0, \\ 2 \sin 5x \sin 2x - 2 \sin 4x \cos 2x - \sin 2x &= 0, \\ \sin 2x(2 \sin 5x - 4 \cos^2 2x - 1) &= 0, \\ \sin 2x \left(\sin 5x - \cos 4x - \frac{3}{2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\sin 2x = 0$, то $2x = k\pi$, т.е. $x = k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).
Учитывая, что $x \in [0, \pi]$, получаем решения $x = 0, \pi/2$ и π .

Если же $\sin 2x \neq 0$, то после сокращения на $\sin 2x$ имеем

$$\sin 5x - \cos 4x = \frac{3}{2}.$$

Так как

$$\begin{aligned}\sin 5x - \cos 4x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) - \cos 4x = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

последнее уравнение можно записать в виде

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

Если $x \in [0, \pi]$, то $-\pi/4 \leq \pi/4 - x/2 \leq \pi/4$, поэтому

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а из уравнения получаем

$$\left|\sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| \geq \frac{3}{4}\sqrt{2} > 1.$$

Следовательно, последнее уравнение не имеет решений в промежутке $[0, \pi]$.

53. $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Из данного неравенства последовательно получаем равносильные неравенства

$$\begin{aligned}(\sin 4x - \sin 2x) + (\sin 3x + \sin x) + \sin x &\leq 0, \\ 2 \cos 3x \sin x + 2 \sin 2x \cos x + \sin x &\leq 0, \\ 2 \cos 3x \sin x + 4 \sin x \cos^2 x + \sin x &\leq 0,\end{aligned}$$

$$2 \sin x \left(\cos 3x + 2 \cos^2 x + \frac{1}{2} \right) \leq 0,$$

$$\sin x \left(\cos 3x + \cos 2x + \frac{3}{2} \right) \leq 0.$$

В последнем неравенстве преобразуем второй множитель:

$$\cos 3x + \cos 2x + \frac{3}{2} = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right).$$

Так как для $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ справедливо неравенство $\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$, то

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Следовательно, для всех $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ выполняется неравенство $\cos 3x + \cos 2x + 3/2 > 0$, поэтому после деления на данный положительный множитель получаем неравенство $\sin x \leq 0$, откуда вытекает, что $(2k+1)\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Учитывая $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, окончательно получаем, что исходное неравенство в промежутке $[\pi/2, 3\pi/2]$ выполняется только при $\pi \leq x \leq 3\pi/2$.

54. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение. Из данного неравенства следуют равносильные неравенства

$$(\sin 5x + \sin x) + \cos 2x(3 - 2 \sin 2x) \geq 0,$$

$$2 \sin 3x \cos 2x + \cos 2x(3 - 2 \sin 2x) \geq 0,$$

$$\cos 2x \left(\sin 3x - \sin 2x + \frac{3}{2} \right) \geq 0.$$

Преобразуем второй множитель в левой части последнего неравенства:

$$\begin{aligned}\sin 3x - \sin 2x + \frac{3}{2} &= 2 \cos \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \\ &= 2 \left(\cos \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right).\end{aligned}$$

Но из условия $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ следует, что $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4}$, поэтому $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. В результате получаем

$$\sin 3x - \sin 2x + \frac{3}{2} \geq 2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) > 0,$$

где последнее числовое неравенство справедливо, так как $9/16 = 1/2 + 1/16 > 1/2$.

Таким образом, после сокращения на положительный множитель $(\sin 3x - \sin 2x + 3/2)$ имеем неравенство $\cos 2x \geq 0$, которое в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ выполняется только при $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.

$$55. \left\{ k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как

$$2 \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sin 2x - \sin x,$$

данное уравнение можно записать в виде

$$4 \sin^3 x + 10 \sin^2 x + 6 \sin x = 3 \sin 2x$$

или

$$4 \sin^3 x + 10 \sin^2 x + 6 \sin x = 6 \sin x \cos x.$$

Из последнего уравнения следует, что все решения уравнения $\sin x = 0$, т.е. $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), являются также решениями исходного уравнения. Если же $\sin x \neq 0$, то после

деления на $2 \sin x$ обеих частей уравнения получаем уравнение

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x + 3 = 3 \cos x.$$

Теперь возведем в квадрат обе части последнего уравнения:

$$4 \sin^4 x + 25 \sin^2 x + 9 + 20 \sin^3 x + 12 \sin^2 x + 30 \sin x = 9 \cos^2 x.$$

Тогда в результате преобразований получаем

$$\begin{aligned} 4 \sin^4 x + 25 \sin^2 x + 9 \sin^2 x + 20 \sin^3 x + \\ + 12 \sin^2 x + 30 \sin x &= 0, \\ 4 \sin^4 x + 20 \sin^3 x + 46 \sin^2 x + 30 \sin x &= 0, \\ 2 \sin^3 x + 10 \sin^2 x + 23 \sin x + 15 &= 0, \\ (\sin x + 1)(2 \sin^2 x + 8 \sin x + 15) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь уравнение $2 \sin^2 x + 8 \sin x + 15 = 0$ не имеет решений, так как соответствующий квадратный трехчлен $2z^2 + 8z + 15$ имеет отрицательный дискриминант.

Если же $\sin x + 1 = 0$, то $\sin x = -1$, поэтому $x = -\pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Отметим, что уравнение $2 \sin^2 x + 5 \sin x + 3 = 3 \cos x$ при $\sin x = -1$ превращается в равенство, справедливое в точках $x = -\pi/2 + 2k\pi$. Следовательно, после возведения в квадрат мы не получаем посторонних решений. В результате исходное уравнение имеет решения $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) и $x = -\pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$56. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как

$$2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x - \cos x,$$

данное уравнение можно записать в виде

$$\cos^3 x - 3 \cos^2 x + 2 \cos x = \sin 2x$$

или

$$\cos^3 x - 3 \cos^2 x + 2 \cos x = 2 \sin x \cos x.$$

Но тогда все решения уравнения $\cos x = 0$, т.е. $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), являются решениями исходного уравнения, так как для таких x последнее уравнение превращается в тождество $0 = 0$.

Если же $\cos x \neq 0$, то после деления обеих частей уравнения на $\cos x$ получаем уравнение

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 2 \sin x.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, имеем

$$\begin{aligned} \cos^4 x + 9 \cos^2 x + 4 - 6 \cos^3 x + \\ + 4 \cos^2 x - 12 \cos x = 4 \sin^2 x, \end{aligned}$$

и в результате равносильных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \cos^4 x + 9 \cos^2 x + 4 \cos^2 x - 6 \cos^3 x + \\ + 4 \cos^2 x - 12 \cos x = 0, \end{aligned}$$

$$\cos^4 x - 6 \cos^3 x + 17 \cos^2 x - 12 \cos x = 0,$$

$$\cos^3 x - 6 \cos^2 x + 17 \cos x - 12 = 0,$$

$$(\cos x - 1)(\cos^2 x - 5 \cos x + 12) = 0.$$

Здесь уравнение $\cos^2 x - 5 \cos x + 12 = 0$ не имеет решений, так как дискриминант соответствующего квадратного трехчлена $z^2 - 5z + 12$ отрицательный. Если же $\cos x - 1 = 0$, то $\cos x = 1$, поэтому $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Необходимо отметить, что при $\cos x = 1$ уравнение

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 2 \sin x$$

превращается в равенство $2 \sin x = 0$, справедливое в точках $x = 2k\pi$. Следовательно, при возведении в квадрат мы не получаем посторонних решений.

Таким образом, данное уравнение имеет решения $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) и $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

57. $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$

Решение. Данное уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) &= \\ &= \sqrt{\cos^4\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 2} \end{aligned}$$

и затем преобразуем обе его части:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) &= \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{12} - x\right)\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \\ \cos^4\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 &= \\ &= \cos^4 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 4\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = \\ &= \cos^4 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos^2 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 = \\ &= \left(\cos^2 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)^2 + 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\left(\cos^2 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)^2 + 2}.$$

В этом уравнении левая часть не превосходит $\sqrt{2}$, а правая — не меньше чем $\sqrt{2}$, поэтому равенство возможно только в случае, когда $\sin(x + \pi/6) = 1$ и $\cos^2 2(x + \pi/6) - 1 = 0$.

Но если $\sin(x + \pi/6) = 1$, то $x + \pi/6 = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), поэтому $x = \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Для таких x получаем, что $\cos^2 2(x + \pi/6) = \cos^2 2(\pi/2 + 2k\pi) = \cos^2 \pi = 1$, поэтому $\cos^2 2(x + \pi/6) - 1 = 0$.

58. $\left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{12} - x\right)\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right), \end{aligned}$$

данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{9 \sin^4 2x + \cos^4 2x}{\sin^2 4x} = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right).$$

В этом уравнении левая часть

$$\begin{aligned} \frac{9 \sin^4 2x + \cos^4 2x}{\sin^2 4x} &= \frac{9 \sin^4 2x + \cos^4 2x}{4 \sin^2 2x \cos^2 2x} = \\ &= \frac{1}{4} \left(9 \operatorname{tg}^2 2x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(3 \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)^2 + 6 \right) \geq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

а правая — $\frac{3}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \leq 3/2$. Следовательно, равенство возможно только в случае, когда $\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 1$ и $3 \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$, т.е.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Если $\cos(x - \pi/12) = 1$, то $x - \pi/12 = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/12 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Для таких x получаем, что $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(\pi/6 + 4k\pi) = \operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

$$59. \left\{ \left(n\pi, \pm \frac{\pi}{3} + m\pi \right), \left(\pm \frac{\pi}{3} + n\pi, m\pi \right) : n, m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) = \frac{5}{4}, \quad \cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, второе уравнение системы можно записать в виде $2 \cos 2x \cos 2y = -1$, т.е. $\cos 2x \cos 2y = -1/2$.

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = 1/2, \\ \cos 2x \cos 2y = -1/2, \end{cases}$$

поэтому $\cos 2x$ и $\cos 2y$ являются корнями квадратного уравнения $z^2 - z/2 - 1/2 = 0$, т.е. $2z^2 - z - 1 = 0$. Следовательно,

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}, \quad \text{т.е. } z = 1 \text{ или } z = -\frac{1}{2}.$$

Если $\cos 2x = 1$ и $\cos 2y = -1/2$, то $2x = 2n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$) и $2y = \pm 2\pi/3 + 2m\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$), поэтому $x = n\pi$ и $y = \pm \pi/3 + m\pi$ ($n, m \in \mathbf{Z}$).

Если $\cos 2x = -1/2$ и $\cos 2y = 1$, то $x = \pm \pi/3 + n\pi$, $y = m\pi$ ($n, m \in \mathbf{Z}$).

$$60. \left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, (-1)^m \frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{2} \right), \left((-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, (-1)^m \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} \right) : n, m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - y \right) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2y \right) \right) = 1 + \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y), \end{aligned}$$

первое уравнение системы можно записать в виде $\sin 2x + \sin 2y = -1/2$.

Преобразуем левую часть второго уравнения системы:

$$\cos 2(x+y) - \cos 2(x-y) = (\cos 2x \cos 2y - \sin 2x \sin 2y) - (\cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y) = -2 \sin 2x \sin 2y.$$

Следовательно, получаем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = -\frac{1}{2}, \\ \sin 2x \sin 2y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

поэтому $\sin 2x$ и $\sin 2y$ являются корнями квадратного уравнения $z^2 + z/2 - 1/2 = 0$, т.е. $2z^2 + z - 1 = 0$. В результате

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \text{ т.е. } z = -1 \text{ или } z = \frac{1}{2}.$$

Если $\sin 2x = -1$ и $\sin 2y = 1/2$, то $2x = (-1)^{n+1}\pi/2 + n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$) и $2y = (-1)^m\pi/6 + m\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = (-1)^{n+1}\pi/4 + n\pi/2$, $y = (-1)^m\pi/12 + m\pi/2$ ($n, m \in \mathbf{Z}$).

Если же $\sin 2x = 1/2$ и $\sin 2y = -1$, то, наоборот, $x = (-1)^n\pi/12 + n\pi/2$ и $y = (-1)^{m+1}\pi/4 + m\pi/2$ ($n, m \in \mathbf{Z}$).

$$61. \{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Решение. Из данного уравнения последовательно получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin 3x + \sin x} &= \sqrt{6(1 - \sin x)}, \\ \sin 3x + \sin x &= 6(1 - \sin x)^2, \\ 2 \sin 2x \cos x &= 6(1 - \sin x)^2, \\ 4 \sin x \cos^2 x &= 6(1 - \sin x)^2, \\ 2 \sin x(1 - \sin^2 x) &= 3 - 6 \sin x + 3 \sin^2 x, \\ 2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вводя новую переменную $z = \sin x$, имеем для z уравнение $2z^3 + 3z^2 - 8z + 3 = 0$, т.е. $(z-1)(2z^2 + 5z - 3) = 0$, поэтому $z = 1$ или $z = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$.

Таким образом, получаем решения $z = 1, 1/2$ и -3 . Очевидно, что $z = -3$ является посторонним решением, так как $|z| = |\sin x| \leq 1$. Кроме того, $z = \sin x = 1$ также является посторонним решением как не принадлежащее ОДЗ исходного уравнения. Наконец, если $\sin x = 1/2$, то $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 3/2 - 4/8 = 1$, поэтому левая часть уравнения равна

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{6}.$$

В результате все решения $x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) уравнения $\sin x = 1/2$ являются решениями исходного уравнения.

62. $\{\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$

Решение. Из данного уравнения последовательно имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos 3x - 3 \cos x - 2} &= \sqrt{2}(1 + \cos x), \\ \cos 3x - 3 \cos x - 2 &= 2(1 + \cos x)^2, \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos x - 2 &= 2 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x, \\ 4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - 10 \cos x - 4 &= 0, \\ 2 \cos^3 x - \cos^2 x - 5 \cos x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, для новой неизвестной $z = \cos x$ получаем уравнение $2z^3 - z^2 - 5z - 2 = 0$, т.е. $(z+1)(2z^2 - 3z - 2) = 0$, поэтому $z = -1$ или $z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$.

Таким образом, $z = -1, 2$ или $-1/2$. Очевидно, что решение $z = 2$ — постороннее, так как $|z| = |\cos x| \leq 1$. Кроме того, посторонним является также решение $z = -1$, поскольку значению $z = -1$ соответствуют x , не принадлежащие ОДЗ первоначального уравнения. Наконец, если $\cos x = -1/2$, то $\cos 3x - 3 \cos x - 2 = 4 \cos^3 x - 6 \cos x - 2 = 1/2$, и легко убедиться в том, что решения уравнения $\cos x = -1/2$, т.е.

$x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), являются решениями исходного уравнения.

$$63. \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем

$$4 \sin^2 x = 4 + \cos 3x.$$

Однако $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, поэтому имеем уравнение

$$4 \cos^3 x + 5 \cos^2 x - 3 \cos x = 0,$$

а для новой неизвестной $z = \cos x$ — уравнение $z(4z^2 + 4z - 3) = 0$, поэтому $z = 0$ или $z = \frac{1}{4}(-2 \pm \pm \sqrt{4 + 12}) = \frac{1}{4}(-2 \pm 4)$, т.е. $z = 1/2$ или $z = -3/2$.

Очевидно, что $z = -3/2$ есть постороннее решение, так как $z = \cos x \in [-1, +1]$. Если $z = \cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $z = \cos x = 1/2$, то $x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Отметим, что

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) &= \cos k\pi = (-1)^k, \\ \sin \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) &= \sin \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

В то же время из первоначального уравнения следует, что $\sin x \geq 0$, поэтому необходимо отбросить те решения уравнения $4 \sin^2 x = 4 + \cos 3x$, для которых $\sin x$ отрицательный, т.е. $x = \pi/2 + (2k + 1)\pi$ и $x = -\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$64. \left\{ k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем

$$3 \sin x (1 - \sin x) = \sin^2 2x.$$

Однако $\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x = 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x)$, поэтому уравнение можно записать в виде

$$3 \sin x - 3 \sin^2 x = 4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x.$$

Следовательно, для новой неизвестной $z = \sin x$ получаем уравнение $4z^4 - 7z^2 + 3z = 0$, т.е. $z(z-1)(4z^2 + 4z - 3) = 0$, откуда $z = 0$, $z = 1$ и $z = \frac{1}{4}(-2 \pm \sqrt{4+12}) = \frac{1}{4}(-2 \pm 4)$, т.е. $z = -3/2$ или $z = 1/2$.

Здесь решение $z = -3/2$ является посторонним, так как $|z| = |\sin x| \leq 1$. Если $z = \sin x = 0$, то $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), причем легко убедиться в том, что все такие решения являются также решениями исходного уравнения.

Если $z = \sin x = 1$, то $x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Такие решения также являются решениями первоначального уравнения.

Наконец, если $z = \sin x = 1/2$, то $x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Эти решения входят в ОДЗ уравнения. Кроме того, для таких x имеем

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \sin \left((-1)^k \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) = \\ &= (-1)^k \sin \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Здесь мы должны оставить только те решения, для которых $\sin 2x \geq 0$, т.е. решения, соответствующие четным k .

$$65. \left\{ -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований получаем уравнения

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin x + \sin 2x - \cos x} &= \cos x - \sin x, \\ \sin x + \sin 2x - \cos x &= (\cos x - \sin x)^2, \\ 1 - 2\sin 2x + \cos x - \sin x &= 0.\end{aligned}$$

Введем новую переменную $z = \cos x - \sin x$. Тогда

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 1 - (\cos x - \sin x)^2 = 1 - z^2,$$

поэтому для z имеем квадратное уравнение $2z^2 + z - 1 = 0$, откуда $z = 1/2$ или $z = -1$.

Из первоначального уравнения следует, что $z = \cos x - \sin x$ является неотрицательной величиной, поэтому $z = -1$

– постороннее решение. Кроме того, легко убедиться в том, что для $z = \cos x - \sin x = 1/2$ обе части исходного уравнения определены, а решения уравнения $\cos x - \sin x = 1/2$ также являются решениями первоначального уравнения. Наконец, $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \pi/4)$, поэтому $\cos(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, т.е. $x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

$$66. \left\{ -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{3\sqrt{2}} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. В результате преобразований получаем уравнения

$$\sqrt{4 + 2(\cos x - \sin x) - \sin 2x} = 1 + 2(\cos x - \sin x),$$

$$\begin{aligned} 4 + 2(\cos x - \sin x) - \sin 2x &= \\ &= 1 + 4(\cos x - \sin x) + 4(\cos x - \sin x)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 + 2(\cos x - \sin x) - \sin 2x &= \\ &= 1 + 4(\cos x - \sin x) + 4 - 4 \sin 2x. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $z = \cos x - \sin x$. Тогда $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 1 - (\cos x - \sin x)^2 = 1 - z^2$, поэтому для z получаем уравнение $2z - (1 - z^2) = 1 + 4z - 4(1 - z^2)$, т.е. $3z^2 + 2z - 2 = 0$.

Таким образом, $z = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Отметим, что из первоначального уравнения следует, что $1 + 2z \geq 0$. Но для $z = -\frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ нетрудно проверить, что $1 + 2z = 1 - \frac{2(1 + \sqrt{7})}{3} < 0$. Следовательно, это решение является посторонним.

Наконец, если $z = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$, то $\cos(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{7}-1}{3\sqrt{2}}$ и

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{3\sqrt{2}} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Для таких x обе части первоначального уравнения хорошо определены и $1 + 2z = \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{7}) > 0$, поэтому они являются решениями исходного уравнения.

$$67. \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из тех x , для которых определен тангенс и, кроме того, $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x \neq 1$. Потенцируя, уравнение можно записать в виде

$$2 + 4 \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 x.$$

Тогда для новой переменной $z = \operatorname{tg}^2 x$ получаем уравнение $2 + \frac{4}{1+z} = z$, т.е. $z^2 - z - 6 = 0$. Следовательно, $z = 3$ или $z = -2$. Очевидно, что $z = -2$ есть постороннее решение. В то же время $z = 3$ приводит к соотношению $\operatorname{tg}^2 x = 3$, поэтому $\operatorname{tg} x = +\sqrt{3}$, так как те x , для которых $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, не входят в ОДЗ.

Таким образом, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, т.е. $x = \pi/3 + k\pi$. ($k \in \mathbb{Z}$).

$$68. \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из тех x , для которых $\cos x > 0$ и $2 \cos x \neq 1$.

В результате потенцирования получаем уравнение

$$5 - 3 \operatorname{tg}^2 x = 4 \cos^2 x.$$

Так как $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, для новой неизвестной $z = \operatorname{tg}^2 x$ уравнение можно записать в виде $5 - 3z = \frac{4}{1+z}$, откуда получаем, что $(5 - 3z)(1 + z) = 4$, т.е. $3z^2 - 2z - 1 = 0$. Следовательно, $z = 1$ или $z = -1/3$. Здесь решение $z = -1/3$ является посторонним. Если же $z = 1$, то $\operatorname{tg} x = \pm 1$, поэтому $x = \pm \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Отметим, что не все полученные решения являются решениями первоначального уравнения. Действительно, для таких x имеем

$$\cos x = \cos \left(\pm \frac{\pi}{4} + k\pi \right) = (-1)^k \cos \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}},$$

поэтому решения, соответствующие нечетным k , необходимо отбросить как не принадлежащие ОДЗ.

$$69. \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $2 \cos 2x + 1 = 4 \cos^2 x - 1$, $1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$, исходное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{39}{5} \cdot 5^{2 \cos^2 x} - \frac{1}{5} \cdot 5^{4 \cos^2 x} = 34.$$

Тогда для новой переменной $y = 5^{2 \cos^2 x}$ имеем уравнение

$$\frac{39}{5}y - \frac{1}{5}y^2 = 34,$$

т.е. $y^2 - 39y + 170 = 0$. Следовательно, $y = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 680}}{2} = \frac{39 \pm 29}{2}$, т.е. $y = 34$ или $y = 5$. Так как $y = 5^{2 \cos^2 x} \leq 5^2 = 25$, решение $y = 34$ постороннее.

Если $y = 5$, то $2 \cos^2 x = 1$, $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$, поэтому $x = \pi/4 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$70. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, для новой переменной $z = 7^{1 - \sin^2 x}$ уравнение можно записать в виде $49z - z^2 = 48$, т.е. $z^2 - 49z + 48 = 0$. Следовательно, $z = 1$ или $z = 48$.

Но $z = 7^{1 - \sin^2 x} \leq 7$, поэтому корень $z = 48$ является посторонним решением. Если же $z = 1$, то $1 - \sin^2 x = 0$, поэтому $\sin x = \pm 1$, откуда $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$71. \left\{ \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Область допустимых значений состоит из тех x , для которых $\sin x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\operatorname{tg} x \neq 1$. Для таких x исходное уравнение можно записать в следующем виде:

$$2 \log_{\sin x}(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\log_{\sin x}(\operatorname{tg} x)} = 3.$$

Если $z = 1$, то $\operatorname{tg} x = \sin x$. В то же время для любых x из ОДЗ $\sin x \neq 0$, поэтому после сокращения на $\sin x$ получаем уравнение $\frac{1}{\cos x} = 1$. В результате $\cos x = 1$ и, значит, $\sin x = 0$. Отсюда вытекает, что $z = 1$ есть постороннее решение.

Если $z = 1/2$, то $\operatorname{tg} x = \sqrt{\sin x}$, поэтому $\operatorname{tg}^2 x = \sin x$, $\sin x = \cos^2 x$, $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, откуда $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, так как $\sin x > 0$.

Таким образом, $x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) или $x = (2k+1)\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), причем вторую серию решений необходимо отбросить, так как $\operatorname{tg} x > 0$.

$$72. \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Область допустимых значений состоит из тех x , для которых $\sin x > 0$, $\cos 2x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos 2x \neq 1$. Для таких x уравнение можно записать в виде

$$\log_{\sin x}(\cos 2x) = 1 + \frac{2}{\log_{\sin x}(\cos 2x)}.$$

Следовательно, для новой переменной $z = \log_{\sin x}(\cos 2x)$ имеем уравнение $z = 1 + 2/z$, откуда получаем квадратное уравнение $z^2 - z - 2 = 0$. Таким образом, $z = 2$ или $z = -1$.

Если $z = -1$, то $\cos 2x = 1/\sin x$. Так как $|\cos 2x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$, из последнего уравнения следует, что $\sin x = \pm 1$. В то же время очевидно, что уравнения $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$ дают нам решения, не принадлежащие ОДЗ.

Если же $z = 2$, то имеем уравнение $\cos 2x = \sin^2 x$, поэтому $1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x$, откуда $\sin^2 x = 1/3$, т.е. $\sin x = \pm 1/\sqrt{3}$. Здесь все решения уравнения $\sin x = -1/\sqrt{3}$ необходимо отбросить, так как $\sin x > 0$.

Наконец, если $\sin x = 1/\sqrt{3}$, то $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), и для таких x

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

т.е. $\cos 2x > 0$ и $\cos 2x \neq 1$. Отсюда заключаем, что

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

являются решениями первоначального уравнения.

73. $\left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Так как

$$2 \left(\frac{1}{4} \right)^{\sin^2 x} = 2^{1-2\sin^2 x} = 2^{\cos 2x},$$

левая часть уравнения равна $2^{\cos 2x+1}$, а само уравнение можно записать в следующем виде:

$$2^{\cos 2x+1} = 2^{\sin 2x+1}.$$

Следовательно, $\cos 2x = \sin 2x$, т.е. $\sin 2x - \cos 2x = 0$, $\sin(2x - \pi/4) = 0$, откуда получаем $2x - \pi/4 = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

Таким образом, $x = \pi/8 + k\pi/2 \quad (k \in \mathbf{Z})$.

74. $\left\{ -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Так как $9^{\cos^2 x} = 3^{2\cos^2 x} = 3 \cdot 3^{2\cos^2 x - 1} = 3 \cdot 3^{\cos 2x}$, левая часть данного уравнения равна $4 \cdot 3^{\cos 2x}$, а само уравнение можно записать в виде

$$4 \cdot 3^{\cos 2x} = 4 \cdot 3^{-\sin 2x}.$$

Следовательно, $\cos 2x = -\sin 2x$. Отсюда получаем, что $\cos 2x + \sin 2x = 0$, поэтому $\sin(2x + \pi/4) = 0$. В результате имеем $2x + \pi/4 = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, т.е. $x = -\pi/8 + k\pi/2 \quad (k \in \mathbf{Z})$.

75. $\left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Решение. Так как $2\cos^2(\pi/4 + x/2) = 1 + \cos(\pi/2 + x) = 1 - \sin x$, имеем

$$16^{\cos^2(\pi/4+x/2)} = 4^{2\cos^2(\pi/4+x/2)} = 4^{1-\sin x}.$$

Следовательно, данное уравнение можно записать в виде

$$4^{\sin x} + \frac{4}{4^{\sin x}} = \frac{17}{2}.$$

Тогда для новой переменной $z = 4^{\sin x}$ получаем уравнение $z + 4/z = 17/2$, откуда $2z^2 - 17z + 8 = 0$. Решениями этого квадратного уравнения являются значения $z = 8$ и $z = 1/2$.

Так как $z = 4^{\sin x} \leq 4$, решение $z = 8$ постороннее. Если же $z = 1/2$, то $\sin x = -1/2$, поэтому $x = (-1)^{k+1}\pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

76. $\{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Так как

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\cos 2x} = 2 \cdot 2^{-\cos 2x} = 2 \cdot 2^{2\sin^2 x - 1} = 4^{\sin^2 x},$$

данное уравнение можно записать в виде

$$4^{\sin^2 x} + \frac{8}{4^{\sin^2 x}} = 9.$$

Следовательно, для новой переменной $z = 4^{\sin^2 x}$ получаем уравнение $z + 8/z = 9$, откуда $z^2 - 9z + 8 = 0$. Решениями этого квадратного уравнения являются значения $z = 1$ и $z = 8$.

Так как $z = 4^{\sin^2 x} \leq 4$, решение $z = 8$ постороннее. Если же $z = 4^{\sin^2 x} = 1$, то $\sin^2 x = 0$, т.е. $\sin x = 0$ и $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

77. $\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, т.е. $-2\sin^2 x = \cos 2x - 1$, данное уравнение можно записать в виде

$$4^{2\cos 2x} = \frac{3}{2} \cdot 4^{\cos 2x} + 1.$$

Следовательно, для новой переменной $z = 4^{\cos 2x}$ получаем квадратное уравнение $z^2 = \frac{3}{2}z + 1$, т.е. $2z^2 - 3z - 2 = 0$, поэтому $z = 2$ или $z = -1/2$.

Так как $z = 4^{\cos 2x} > 0$, решение $z = -1/2$ является посторонним. Если же $z = 4^{\cos 2x} = 2$, то $\cos 2x = 1/2$, поэтому $2x = \pm\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Таким образом, $x = \pm\pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$78. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $9^{\cos^2 x} = 9^{\frac{1}{2}(\cos 2x + 1)} = 3^{\cos 2x + 1} = 3 \cdot 3^{\cos 2x}$, данное решение можно записать в виде

$$6 \cdot 3^{2 \cos 2x} + 3^{\cos 2x} = 1.$$

Следовательно, для новой переменной $z = 3^{\cos 2x}$ получаем квадратное уравнение $6z^2 + z - 1 = 0$, поэтому $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12}$, т.е. $z = -1/2$ или $z = 1/3$.

Очевидно, что $z = 3^{\cos 2x} > 0$, поэтому $z = -1/2$ – постороннее решение. Если же $z = 3^{\cos 2x} = 1/3$, то $\cos 2x = -1$. Следовательно, $2x = \pi + 2k\pi$, т.е. $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$79. \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. Потенцируя, получаем уравнение

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x} = 3(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Следовательно,

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x} = 3 \cos 2x, \quad \cos 2x = 3 \cos 2x \operatorname{tg}^2 x.$$

Здесь решения уравнения $\cos 2x = 0$ не принадлежат области допустимых значений первоначального уравнения. Разделив обе части последнего уравнения на $\cos 2x$, имеем $1 = 3 \operatorname{tg}^2 x$, поэтому $\operatorname{tg} x = \pm 1/\sqrt{3}$. Однако решения уравнения $\operatorname{tg} x =$

$= -1/\sqrt{3}$ также не входят в ОДЗ. В результате остаются решения уравнения $\operatorname{tg} x = 1/\sqrt{3}$, т.е. $x = \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Из этих решений необходимо выбросить те, которые содержатся в третьей четверти, где $\sin x + \cos x \leq 0$.

Таким образом, решениями исходного уравнения являются $x = \pi/6 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

80. $\{\arctg 2 + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Потенцируя, получаем уравнение

$$4 \cos^2 x = \frac{\sin^4 x}{\sin 2x},$$

которое можно преобразовать в уравнение вида $8 \cos^3 x = \sin^3 x$, откуда $\operatorname{tg}^3 x = 8$, т.е. $\operatorname{tg} x = 2$. Следовательно, $x = \arctg 2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Так как в ОДЗ первоначального уравнения входят только те x , для которых $\cos x > 0$ и $\sin x > 0$, из полученных решений необходимо отбросить решения, соответствующие нечетным k . В результате получаем, что исходное уравнение имеет решения $x = \arctg 2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

81. $\{\frac{\pi}{4} + k\pi, (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$.

Решение. Ясно, что $\sin^4 x + 1 > 0$ и $9 + 8 \sin^2 x - 3 \sin 2x \geq 9 - 3 \sin 2x \geq 6 > 0$. Следовательно, обе части уравнения определены для всех $x \in \mathbf{R}$.

Потенцируя, получаем уравнение

$$9 + 8 \sin^2 x - 3 \sin 2x = 8(\sin^4 x + 1),$$

откуда

$$1 + 8 \sin^2 x - 3 \sin 2x - 8 \sin^4 x = 0.$$

Здесь левая часть уравнения $1 + 8 \sin^2 x(1 - \sin^2 x) - 3 \sin 2x = 1 + 2 \sin^2 2x - 3 \sin 2x = (2 \sin 2x - 1)(\sin 2x - 1)$. Следовательно, имеем уравнение

$$(2 \sin 2x - 1)(\sin 2x - 1) = 0.$$

Если $2 \sin 2x - 1 = 0$, то $\sin 2x = 1/2$, поэтому $2x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = (-1)^k \pi/12 + k\pi/2$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $\sin 2x - 1 = 0$, то $\sin 2x = 1$, поэтому $2x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $x = \pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$82. \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \pm \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как $9 + \cos 2x \geq 8 > 0$ и $\sin^2 x \cos^2 x + 1 \geq 1 > 0$, область допустимых значений данного уравнения состоит из всех $x \in \mathbf{R}$.

Потенцируя, получаем уравнение

$$\frac{9 + \cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x + 1} = 8,$$

откуда в результате преобразований следует

$$9 + \cos 2x = 8 \sin^2 x \cos^2 x + 8, \quad 1 + \cos 2x - 2 \sin^2 2x = 0, \\ 2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Таким образом, для новой переменной $z = \cos 2x$ имеем квадратное уравнение $2z^2 + z - 1 = 0$, поэтому $z = -1$ или $z = 1/2$.

Если $z = \cos 2x = -1$, то $2x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если же $z = \cos 2x = 1/2$, то $2x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pm \pi/6 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$$83. \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Левая часть данного уравнения определена для тех x , для которых $\cos x > 0$, $\cos x \neq 1$, $\cos \frac{3}{4}x \neq 0$.

При выполнении этих условий уравнение можно записать в виде

$$\cos^2 \left(\frac{3}{4}x \right) = \cos x.$$

Так как

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{3}{4}x\right) &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\frac{3}{2}x\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2}\right), \\ \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1,\end{aligned}$$

для новой неизвестной $y = \cos(x/2)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{2}(1 + 4y^3 - 3y) = 2y^2 - 1,$$

т.е. $4y^3 - 4y^2 - 3y + 3 = 0$, $(y - 1)(4y^2 - 3) = 0$.

Следовательно, $y = 1$ или $y = \pm\sqrt{3}/2$.

Если $y = \cos(x/2) = 1$, то $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = 2 - 1 = 1$, поэтому решения уравнения $y = \cos(x/2) = 1$ находятся вне ОДЗ первоначального уравнения.

Если же $y = \cos(x/2) = \pm\sqrt{3}/2$, то $\cos x = 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$, поэтому $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Все такие решения принадлежат ОДЗ исходного уравнения.

$$84. \left\{ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Решение. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{3x}{4} + \cos\frac{3x}{4}\right) = \sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right),$$

уравнение можно записать в виде

$$2\log_{(-\cos x)}\left|\sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1,$$

поэтому

$$\sin^2\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos x.$$

Левая часть этого уравнения

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sin\frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}\right),\end{aligned}$$

а правая часть $-\cos x = 2\sin^2(x/2) - 1$. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \left(1 + 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\frac{x}{2} - 1,$$

т.е. $1 + 3y - 4y^3 = 4y^2 - 2$, где $y = \sin(x/2)$.

Таким образом, $4y^3 + 4y^2 - 3y - 3 = 0$, т.е. $(y + 1)(4y^2 - 3) = 0$, поэтому $y = -1$ или $y = \pm\sqrt{3}/2$.

Если $y = \sin(x/2) = -1$, то $-\cos x = 2\sin^2(x/2) - 1 = 2 - 1 = 1$, поэтому $y = -1$ является посторонним решением.

Если $y = \sin(x/2) = \pm\sqrt{3}/2$, то $x/2 = \pm\pi/3 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), т.е. $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Легко убедиться в том, что такие решения принадлежат ОДЗ первоначального уравнения.

85. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $x_2 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{a}{2} - 1\right) + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если $a < 0$ или $a > 4$, то уравнение имеет одну серию решений x_1 ; если $0 \leq a \leq 4$, то уравнение имеет две серии решений x_1 и x_2 .

Решение. Так как

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \sin x,$$

данное уравнение можно записать в виде

$$2(1 - \sin^2 x) = a(1 - \sin x),$$

поэтому

$$\begin{aligned}2 \sin^2 x - a \sin x - 2 + a &= 0, \\ (\sin x - 1)(2 \sin x + 2 - a) &= 0.\end{aligned}$$

Если $\sin x = 1$, то $x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Если $2 + 2 \sin x - a = 0$, то $\sin x = a/2 - 1$, поэтому

$$x = (-1)^k \arcsin \left(\frac{a}{2} - 1 \right) + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Отметим, что уравнение $\sin x = a/2 - 1$ разрешимо только при условии $-1 \leq a/2 - 1 \leq 1$, т.е. $0 \leq a \leq 4$.

86. Если $a \leq \frac{1}{2}$, то

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{a}{1-a} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z});$$

если $a > \frac{1}{2}$, то уравнение не имеет решений.

Решение. Так как $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$, данное уравнение можно записать в виде

$$(1 - a) \sin 2x = a.$$

Можно считать, что $a \neq 1$, так как при $a = 1$ уравнение сводится к неверному равенству $0 = 1$. Разделив на $(1 - a)$, получаем, что $\sin 2x = \frac{a}{1-a}$, поэтому

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \frac{a}{1-a} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Здесь уравнение $\sin 2x = a/(1 - a)$ разрешимо только при условии $-1 \leq a/(1 - a) \leq 1$, т.е. $a \leq 1/2$.

Действительно, если $a < 1$, то $1 - a > 0$, поэтому получаем неравенство $-1 + a \leq a \leq 1 - a$. Неравенство $-1 + a \leq a$ справедливо для любых a , а из неравенства $a \leq 1 - a$ следует, что $a \leq 1/2$. Если же $a > 1$, то получаем неравенство $-1 + a \geq a \geq 1 - a$, где левая часть $-1 + a \geq a$ не имеет решений.

87. 1) $b \leq 0$, a — любое число,
 2) $0 < b \leq 1$, $|a| \geq 2\sqrt{b}$,
 3) $b > 1$, $|a| \geq b + 1$.

Решение. Пусть $t = \cos x$. Тогда получаем

$$t^2 - at + b \leq 0 \quad \text{и} \quad |t| \leq 1.$$

Ясно, что квадратное неравенство имеет хотя бы одно решение только в случае, когда дискриминант квадратного трехчлена $a^2 - 4b \geq 0$. Кроме того, при выполнении последнего условия имеем решения этого неравенства

$$\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}) \leq t \leq \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Таким образом, данное уравнение имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства

$$a^2 \geq 4b, \quad \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}) \geq -1, \quad \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}) \leq 1,$$

т.е.

$$a^2 \geq 4b, \quad \sqrt{a^2 - 4b} \geq -a - 2, \quad \sqrt{a^2 - 4b} \geq a - 2.$$

Объединяя два последних неравенства, получаем

$$a^2 \geq 4b \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2 - 4b} \geq |a| - 2.$$

Очевидно, что при $b \leq 0$ оба неравенства справедливы для любых значений a . Если $b > 0$, то из первого неравенства получаем $|a| \geq 2\sqrt{b}$. Из второго неравенства после возведения в квадрат обеих частей неравенства при $|a| \geq 2$ имеем неравенство $|a| \geq b + 1$. Если же $|a| < 2$, то при $|a| \geq 2\sqrt{b}$ неравенство $\sqrt{a^2 - 4b} \geq |a| - 2$ выполняется очевидным образом. Сравнивая между собой величины $2\sqrt{b}$ и $b + 1$, получаем при $0 < b \leq 1$ условие $|a| \geq 2\sqrt{b}$, а при $b > 1$ — условие $|a| \geq b + 1$.

$$88. 1) a > -1, b \leq a + 2,$$

$$2) a \leq -1, b \leq -\frac{1}{a}.$$

Решение. Пусть $t = \sin x$. Тогда получаем

$$at^2 + 2t - b \geq 0 \quad \text{и} \quad |t| \leq 1.$$

Если $a = 0$, то $2t - b \geq 0$ и $|t| \leq 1$, т.е. $t \geq b/2$ и $|t| \leq 1$. В этом случае данное уравнение имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $b \leq 2$.

Рассмотрим случай, когда $a > 0$. Если $1 + ab \leq 0$, т.е. $b \leq -1/a$, то $at^2 + 2t - b \geq 0$ для любых t , поэтому уравнение имеет решения. Если $1 + ab > 0$, т.е. $b > -1/a$, то

$$t \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + ab}}{a} \quad \text{или} \quad t \leq \frac{-1 - \sqrt{1 + ab}}{a}.$$

Следовательно, уравнение не имеет решений, если одновременно выполняются неравенства

$$1 < \frac{-1 + \sqrt{1 + ab}}{a} \quad \text{и} \quad -1 > \frac{-1 - \sqrt{1 + ab}}{a},$$

т.е. $\sqrt{1 + ab} > a + 1$ и $\sqrt{1 + ab} > a - 1$. Так как второе неравенство является следствием первого, достаточно рассмотреть только неравенство $\sqrt{1 + ab} > a + 1$. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $1 + ab > a^2 + 2a + 1$, поэтому $ab > a^2 + 2a$, $b > a + 2$. Таким образом, в случае, когда $a > 0$, уравнение имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $b \leq a + 2$.

Пусть $a < 0$. Если $1 + ab < 0$, т.е. $b > -1/a$, то для любого t справедливо неравенство $at^2 + 2t - b < 0$, поэтому уравнение не имеет решений. Если же $1 + ab \geq 0$, т.е. $b \leq -1/a$, то неравенство $at^2 + 2t - b \geq 0$ справедливо только для тех t , для которых

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + ab}}{a} \leq t \leq \frac{-1 - \sqrt{1 + ab}}{a}.$$

Следовательно, уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда $-1 > \frac{-1-\sqrt{1+ab}}{a}$ или $\frac{-1+\sqrt{1+ab}}{a} > 1$. Первое неравенство после преобразований имеет вид $\sqrt{1+ab} < -1+a$ и не имеет решений при $a < 0$. Второе неравенство сводится к неравенству $\sqrt{1+ab} < 1+a$. Это неравенство не выполняется при $a \leq -1$, а для $a \in (-1, 0)$ после возведения в квадрат имеем $1+ab < 1+2a+a^2$, т.е. $b > a+2$. В результате получаем пары (a, b) , удовлетворяющие условиям $-1 < a < 0$, $b \leq a+2$ или $a \leq -1$, $b \leq -1/a$.

Объединяя условия разрешимости уравнения в рассмотренных случаях $a = 0$, $a > 0$ и $a < 0$, получаем множество пар (a, b) , для которых $a > -1$, $b \leq a+2$ или $a \leq -1$, $b \leq -1/a$.

$$89. 1) x_1 = \pi k + \frac{3\pi}{20} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \right),$$

$$y_1 = -\pi k + \frac{3\pi}{20} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \right) \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$2) x_2 = \pi k + \frac{3\pi}{20} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \right),$$

$$y_2 = -\pi k + \frac{3\pi}{20} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \right) \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Решение. Используя формулу $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$, второе уравнение системы можно записать в виде

$$\cos(x-y) = \frac{1}{5} + \cos(x+y).$$

Так как $x+y = 3\pi/10$, имеем $\cos(x+y) = \cos \frac{3\pi}{10}$, поэтому $\cos(x-y) = 1/5 + \cos(3\pi/10)$. Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y = \frac{3\pi}{10}, \\ x-y = 2\pi k \pm \arccos \left(\frac{1}{5} + \cos \frac{3\pi}{10} \right), \end{cases}$$

которая легко решается.

$$90. \quad 1) \quad x_1 = \pi k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$y_1 = -\pi k + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$2) \quad x_2 = -\pi k + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$y_2 = \pi k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Решение. Воспользовавшись соотношением

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$$

и первым уравнением системы, второе уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(x-y)} = 10.$$

Следовательно, $\cos(x-y) = 1/10 - \sqrt{3}/2$, поэтому

$$x - y = 2\pi k + \arccos \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

или

$$-x + y = 2\pi k + \arccos \left(\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Но тогда из этих соотношений и из уравнения $x + y = \pi/6$ легко найти неизвестные.

$$91. \quad 1) \quad \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\operatorname{arctg} 3 + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ если } a = 1,$$

$$2) \quad \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2(1-a)} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ если } -\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq$$

$$\leq a \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2} \text{ и } a \neq 1,$$

$$3) \quad \text{уравнение не имеет решений, если } a < -\frac{\sqrt{10}+1}{2} \text{ или } a > \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

Решение. Если $a = 1$, то данное уравнение имеет вид

$$3 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Следовательно, $\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -3$, т.е. $x = \pi/2 + k\pi$ или $x = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Если $a \neq 1$, то из уравнения видно, что $\cos x \neq 0$, поэтому после деления обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ получаем уравнение

$$(2 + a) + \operatorname{tg} x = (1 - a) \operatorname{tg}^2 x.$$

Таким образом, для новой неизвестной $z = \operatorname{tg} x$ имеем квадратное уравнение

$$(1 - a)z^2 - z - (2 + a) = 0.$$

Условие разрешимости этого уравнения в области действительных чисел $1 + 4(1 - a)(2 + a) \geq 0$, откуда $4a^2 + 4a - 9 \leq 0$ и, значит, $-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$. Наконец, корни квадратного уравнения

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4a - 4a^2}}{2(1 - a)},$$

поэтому $x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4a - 4a^2}}{2(1 - a)} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

92. 1) $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, если $a = 0$,

2) $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{1+a-a^2}}{a} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, если $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a < 0$ или $0 < a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

3) уравнение не имеет решений, если $a < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Если $a = 0$, то данное уравнение имеет вид $\sin 2x + \cos^2 x = 0$, т.е. $\cos x(2 \sin x + \cos x) = 0$. Следовательно, $\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -1/2$, поэтому $x = \pi/2 + k\pi$ или $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Если $a \neq 0$, то из уравнения видно, что $\cos x \neq 0$, поэтому после деления обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ получаем уравнение

$$a \operatorname{tg}^2 x + (a - 1) = 2 \operatorname{tg} x.$$

Таким образом, для новой неизвестной $z = \operatorname{tg} x$ имеем квадратное уравнение $az^2 - 2z + (a - 1) = 0$. Условие разрешимости этого уравнения $1 - a(a - 1) \geq 0$, т.е. $a^2 - a - 1 \leq 0$. Следовательно, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Наконец, корнями квадратного уравнения являются $z = \frac{1 \pm \sqrt{1+a-a^2}}{a}$, поэтому $x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{1+a-a^2}}{a} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

$$93. \quad x_1 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(3a + 1 + \sqrt{6a + 3}) + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$x_2 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(3a + 1 - \sqrt{6a + 3}) + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

1) Если $a < -\frac{1}{2}$ или $a > 1$, то уравнение не имеет решений,

2) если $-\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{1}{3}$, то две серии решений x_1 и x_2 ,

3) если $-\frac{1}{3} < a \leq 1$, то одна серия решений x_1 .

Решение. Так как $4 \sin^2(\pi/4 + x) = 2(1 + \sin 2x)$, данное уравнение можно записать в виде

$$\sin^2 2x - 2(1 + 3a) \sin 2x + (9a^2 - 2) = 0.$$

Следовательно, для новой неизвестной $t = \sin 2x$ имеем квадратное уравнение

$$t^2 - 2(1 + 3a)t + (9a^2 - 2) = 0.$$

Условие разрешимости этого уравнения в области действительных чисел $4((3a + 1)^2 - 9a^2 + 2) = 4(6a + 3) \geq 0$, т.е. $a \geq -1/2$.

Корни квадратного уравнения $t = 3a + 1 \pm \sqrt{6a + 3}$, поэтому

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(3a + 1 \pm \sqrt{6a + 3}) + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Так как $t = \sin 2x$, необходимо выяснить, для каких значений a решения $t_1 = 3a + 1 + \sqrt{6a + 3}$ и $t_2 = 3a + 1 - \sqrt{6a + 3}$ содержатся в промежутке $[-1, 1]$.

Рассмотрим неравенство $|t_1| \leq 1$, т.е. $-3a - 2 \leq \sqrt{6a + 3} \leq -3a$. Если $a > 0$, то $-3a < 0$, поэтому неравенство не имеет решений. Если $a \leq 0$, то из неравенства $\sqrt{6a + 3} \leq -3a$ после возведения в квадрат обеих его частей получаем $6a + 3 \leq 9a^2$, т.е. $3a^2 - 2a - 1 \geq 0$, поэтому $a \leq -1/3$ или $a \geq 1$. Учитывая $-1/2 \leq a \leq 0$, имеем $-1/2 \leq a \leq -1/3$. Наконец, отметим, что для таких a справедливо неравенство $-3a - 2 < 0$, поэтому и неравенство $-3a - 2 \leq \sqrt{6a + 3}$ также справедливо. Таким образом, условия $a \geq -1/2$ и $|t_1| \leq 1$ выполняются только при $-1/2 \leq a \leq -1/3$.

Теперь рассмотрим неравенство $|t_2| \leq 1$, т.е.

$$3a \leq \sqrt{6a + 3} \leq 3a + 2.$$

Если $a \leq 0$, то $3a \leq \sqrt{6a + 3}$ при $a \geq -1/2$. Если $a > 0$, то имеем $3a^2 - 2a - 1 \leq 0$, т.е. $-1/3 \leq a \leq 1$. Следовательно, неравенства $3a \leq \sqrt{6a + 3}$ и $a \geq -1/2$ справедливы только при $-1/2 \leq a \leq 1$. Далее, для $a \geq -1/2$ неравенство $\sqrt{6a + 3} \leq 3a + 2$ равносильно неравенству $9a^2 + 6a + 1 \geq 0$. Однако левая часть этого неравенства есть полный квадрат, поэтому оно выполняется. Окончательно получаем, что условия $|t_2| \leq 1$, $a \geq -1/2$ справедливы только при $-1/2 \leq a \leq 1$.

$$94. \quad x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a - \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a + \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1) Если $a < -\frac{4+8\sqrt{2}}{7}$ или $a > \frac{8\sqrt{2}-4}{7}$, то уравнение не имеет решений,

2) если $0 \leq a \leq \frac{8\sqrt{2}-4}{7}$ или $-\frac{4+8\sqrt{2}}{7} \leq a \leq -2$, то две серии решений x_1 и x_2 ,

3) если $-2 < a < 0$, то одна серия решений x_2 .

Решение. Так как

$$\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x = 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x),$$

данное уравнение можно записать в виде

$$8 \sin^4 x - 2(4 - a) \sin^2 x + a^2 = 0.$$

Следовательно, для новой неизвестной $t = \sin^2 x$ получаем квадратное уравнение

$$8t^2 - 2(4 - a)t + a^2 = 0.$$

Условие разрешимости этого уравнения в области действительных чисел $(4 - a)^2 - 8a^2 \geq 0$, т.е. $7a^2 + 8a - 16 \leq 0$, поэтому

$$-\frac{4 + 8\sqrt{2}}{7} \leq a \leq \frac{-4 + 8\sqrt{2}}{7}.$$

В то же время корни квадратного уравнения

$$t = \frac{4 - a \pm \sqrt{(4 - a)^2 - 8a^2}}{8} = \frac{4 - a \pm \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{8}.$$

Так как $t = \sin^2 x$, необходимо выяснить, для каких значений a решения квадратного уравнения содержатся в промежутке $[0, 1]$.

Рассмотрим $t_1 = \frac{4 - a + \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{8}$. Условие $0 \leq t_1 \leq 1$ можно записать в виде неравенства $a - 4 \leq \sqrt{16 - 8a - 7a^2} \leq a + 4$. Здесь $a - 4 \leq \frac{-4 + 8\sqrt{2}}{7} - 4 = \frac{-32 + 8\sqrt{2}}{7} < 0$, поэтому достаточно рассмотреть неравенство $\sqrt{16 - 8a - 7a^2} \leq a + 4$.

Так как $a + 4 > 0$, после возведения в квадрат обеих частей неравенства получаем $16 - 8a - 7a^2 \leq a^2 + 8a + 16$, т.е. $16a + 8a^2 = 8a(2 + a) \geq 0$, поэтому $a \leq -2$ или $a \geq 0$. Следовательно, неравенство $0 \leq t_1 \leq 1$ справедливо только при $-\frac{4+8\sqrt{2}}{7} \leq a \leq -2$ или $0 \leq a \leq \frac{8\sqrt{2}-4}{7}$.

Теперь рассмотрим $t_2 = \frac{4-a-\sqrt{16-8a-7a^2}}{8}$. Условие $0 \leq t_2 \leq 1$ можно записать в виде неравенства

$$-4 - a \leq \sqrt{16 - 8a - 7a^2} \leq 4 - a.$$

Здесь $-4 - a \leq -4 + \frac{4+8\sqrt{2}}{7} = \frac{-24+8\sqrt{2}}{7} < 0$, поэтому достаточно рассмотреть неравенство $\sqrt{16 - 8a - 7a^2} \leq 4 - a$. Так как $4 - a > 0$, после возведения в квадрат получаем равносильное неравенство $16 - 8a - 7a^2 \leq 16 - 8a + a^2$, т.е. $8a^2 \geq 0$. Таким образом, условие $0 \leq t_2 \leq 1$ выполняется для всех a , удовлетворяющих условию разрешимости квадратного уравнения.

Наконец, $t = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos 2x = 1 - 2t &= 1 - \frac{1}{4}(4 - a \pm \sqrt{16 - 8a - 7a^2}) = \\ &= \frac{a \mp \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a \mp \sqrt{16 - 8a - 7a^2}}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

95. $x_1 = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z});$

$$x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1+\sqrt{5+4a}}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z});$$

$$x_3 = (-1)^k \arcsin \frac{1-\sqrt{5+4a}}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

1) Если $a < -\frac{5}{4}$ или $a > 1$, то одна серия решений x_1 ,

2) если $-\frac{5}{4} \leq a \leq -1$, то три серии решений x_1 , x_2 и x_3 ,

3) если $-1 < a \leq 1$, то две серии решений x_1 и x_3 .

Замечание. В крайних точках $-5/4$, -1 , 1 решения разных серий могут совпадать. Например, $x_2 = x_3$ при $a = -5/4$, $x_3 = x_1$ при $a = -1$. Разумеется, что $x_2 = x_3$ или $x_3 = x_1$ надо понимать как совпадение соответствующих множеств решений.

Решение. Пусть $t = \sin x$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $(t-1)(1-t^2) + at = -1$, т.е.

$$t(t^2 - t - (1+a)) = 0.$$

Если $t = \sin x = 0$, то $x_1 = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Рассмотрим квадратное уравнение $t^2 - t - (1+a) = 0$. Его решение $t = \frac{1 \pm \sqrt{5+4a}}{2}$, причем условием разрешимости уравнения в области действительных чисел является условие $5+4a \geq 0$, т.е. $a \geq -5/4$.

Далее, в зависимости от параметра a необходимо рассмотреть только те решения квадратного уравнения, которые удовлетворяют неравенству $-1 \leq t \leq 1$.

Неравенство $-1 \leq \frac{1+\sqrt{5+4a}}{2} \leq 1$ равносильно следующим неравенствам: $-3 \leq \sqrt{5+4a} \leq 1$, $\sqrt{5+4a} \leq 1$, $5+4a \leq 1$, $a \leq -1$. Следовательно,

$$x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1 + \sqrt{5+4a}}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

является решением данного уравнения только при $-5/4 \leq a \leq -1$.

Наконец, неравенство $-1 \leq \frac{1-\sqrt{5+4a}}{2} \leq 1$ равносильно неравенствам $-3 \leq -\sqrt{5+4a} \leq 1$, $\sqrt{5+4a} \leq 3$, $5+4a \leq 9$, $a \leq 1$. Следовательно,

$$x_3 = (-1)^k \arcsin \frac{1 - \sqrt{5+4a}}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

является решением данного уравнения только при $-5/4 \leq a \leq 1$.

$$96. x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z});$$

$$x_2 = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{5-8a}}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z});$$

$$x_3 = \pm \arccos \frac{-1 - \sqrt{5-8a}}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

1) Если $a < -\frac{1}{2}$ или $a > \frac{5}{8}$, то одна серия решений x_1 ,

2) если $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{8}$, то три серии решений x_1 , x_2 и x_3 ,

3) если $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$, то две серии решений x_1 и x_2 .

Замечание. В крайних точках $-1/2$, $1/2$ и $5/8$ решения разных серий могут совпадать. Например, $x_2 = x_3$ при $a = 5/8$ и $x_1 = x_2$ при $a = 1/2$. Разумеется, что равенства $x_2 = x_3$ и $x_1 = x_2$ означают совпадение соответствующих множеств решений.

Решение. Пусть $t = \cos x$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $t(t^2 + t + (2a - 1)) = 0$.

Если $t = \cos x = 0$, то $x_1 = \pi/2 + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

Рассмотрим квадратное уравнение $t^2 + t + (2a - 1) = 0$.

Его решение $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5-8a}}{2}$, причем условием разрешимости уравнения в области действительных чисел является условие $5 - 8a \geq 0$, т.е. $a \leq 5/8$.

Далее, в зависимости от параметра a необходимо рассмотреть только те решения квадратного уравнения, которые удовлетворяют неравенству $-1 \leq t \leq 1$.

Неравенство $-1 \leq \frac{-1 + \sqrt{5-8a}}{2} \leq 1$ равносильно неравенствам $-1 \leq \sqrt{5-8a} \leq 3$, $5-8a \leq 9$, $8a \geq -4$, $a \geq -1/2$. Следовательно,

$$x_2 = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{5-8a}}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

является решением исходного уравнения только при $-1/2 \leq a \leq 5/8$.

Наконец, неравенство $-1 \leq \frac{-1-\sqrt{5-8a}}{2} \leq 1$ равносильно неравенствам $-1 \leq -\sqrt{5-8a} \leq 3$, $1 \geq \sqrt{5-8a} \geq -3$, $1 \geq 5-8a$, $8a \geq 4$, $a \geq 1/2$. Следовательно,

$$x_3 = \pm \arccos \frac{-1 - \sqrt{5-8a}}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

является решением данного уравнения только при $1/2 \leq a \leq 5/8$.

ГЛАВА 5. ГЕОМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

1. $2 \operatorname{arccctg} 2, \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arccctg} 2.$

Решение. Пусть a, b, c ($a \leq b \leq c$) – стороны прямоугольного треугольника, α – угол между катетом a и гипотенузой c . По условию задачи $c - b = b - a$, поэтому $c - c \sin \alpha = c \sin \alpha - c \cos \alpha$, т.е. $1 + \cos \alpha = 2 \sin \alpha$. Это уравнение для угла α можно записать в виде $2 \cos^2(\alpha/2) = 4 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$, откуда $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2$ и $\alpha = 2 \operatorname{arccctg} 2$. Второй острый угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arccctg} 2$.

2. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Решение. Пусть a, b, c ($a \leq b \leq c$) – стороны прямоугольного треугольника, α – угол между катетом a и гипотенузой c . По условию задачи $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, поэтому $\frac{c}{c \sin \alpha} = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha}$, т.е. $\cos \alpha = \sin^2 \alpha$. Так как $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, отсюда получаем уравнение для угла α : $\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$.

Следовательно, $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Здесь уравнение $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ получаем искомый острый угол $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Наконец, второй острый угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}c, \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}c.$

Решение. Если a, b – катеты и h – высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, то $ab = ch = \frac{c^2}{3}$, поэтому для определения катетов имеем систему уравнение

$$ab = \frac{c^2}{3}, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Из этой системы получаем $(a \pm b)^2 = (a^2 + b^2) \pm 2ab = c^2 \pm \frac{2}{3}c^2 = \frac{5}{3}c^2$ или $\frac{1}{3}c^2$. Считая для определенности, что

$a \geq b$, находим, что $a + b = \sqrt{5/3}c$ и $a - b = \sqrt{1/3}c$, т.е.

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) c = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}} c,$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} c.$$

4. $\frac{6}{25}c^2$.

Решение. Если a и b – катеты данного прямоугольного треугольника, то $a^2 + b^2 = c^2$, а по условию задачи $c = a + b/3$. Следовательно, $(c - b/3)^2 + b^2 = c^2$, $c^2 - \frac{2}{3}bc + b^2/9 + b^2 = c^2$, откуда получаем, что $\frac{10}{9}b^2 = \frac{2}{3}bc$ и $b = \frac{3}{5}c$. Но тогда $a = c - b/3 = c - c/5 = \frac{4}{5}c$.

Таким образом, искомая площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}c \right) \left(\frac{3}{5}c \right) = \frac{6}{25}c^2.$$

5. $\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Решение. Если α – угол между гипотенузой и биссектрисой, то 2α – один из острых углов прямоугольного треугольника, поэтому один из катетов $x = a \cos 2\alpha$. В то же время его можно найти с помощью биссектрисы $a/\sqrt{3}$ по формуле $x = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha$. В результате получаем $x = a \cos 2\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha$, т.е. $\sqrt{3} \cos 2\alpha = \cos \alpha$. Последнее уравнение имеет решение $\alpha = \pi/6$.

Таким образом, $x = a \cos 2\alpha = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}$, а второй катет $y = a \sin 2\alpha = a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

6. $\frac{3\sqrt{5}}{2}a, \frac{4\sqrt{10}}{3}a.$

Решение. Если α и β – острые углы прямоугольного треугольника, то

$$\cos \alpha = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

Но тогда искомые биссектрисы

$$x = \frac{4a}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}} = \frac{4a}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{4}{5})}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}a,$$

$$y = \frac{3a}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{5})}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}a.$$

7. $\frac{l}{\sqrt{2}}.$

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC катеты a и b лежат против вершин A и B соответственно, K – центр квадрата, построенного на гипотенузе c . Если α – угол при вершине A , то по теореме косинусов из треугольника ACK получаем, что для искомого расстояния $x = AK$ справедливо соотношение

$$x^2 = AK^2 + AC^2 - 2AK \cdot AC \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right),$$

т.е.

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2}{2} + b^2 - 2 \frac{c}{\sqrt{2}} b \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{c^2}{2} + b^2 - \\ &- 2 \frac{cb}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{c^2}{2} + b^2 - bc \left(\frac{b}{c} - \frac{a}{c} \right) = \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} + b^2 - b(b - a) = \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{l^2}{2}, \end{aligned}$$

поэтому $x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$

8. $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC катеты $BC = a$, $AC = b$, а CD – биссектриса прямого угла C (рис. 14). Из точки D проведем прямые, параллельные катетам. Очевидно, что прямоугольник $ECFD$ является квадратом. Пусть x – сторона этого квадрата. Так как треугольники AFD и ACB подобные, имеет место пропорция $\frac{FD}{CB} = \frac{AF}{AC}$, т.е. $\frac{x}{a} = \frac{b-x}{b}$.

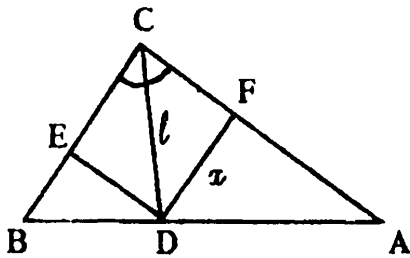


Рис. 14.

Следовательно, $xb = a(b - x)$, $x(a + b) = ab$, $x = \frac{ab}{a+b}$. Но CD есть диагональ квадрата со стороной x , поэтому $l = \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

9. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} R$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол при вершине B равен α , r – радиус вписанного круга. Так как для описанного круга гипотенуза AB является диаметром, то $AB = 2R$, $AC = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \cos \alpha$.

Площадь треугольника ABC можно вычислить двумя способами:

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2} = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha,$$

$$S = (AB + AC + BC) \frac{r}{2} = (1 + \sin \alpha + \cos \alpha) r R,$$

поэтому $R^2 \sin 2\alpha = (1 + \sin \alpha + \cos \alpha) r R$, откуда легко найти r :

$$r = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} R.$$

$$10. \frac{1+(k+1)\sqrt{k^2+1}+k^2}{2k}r.$$

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине B равен α , катеты a и b лежат против вершин A и C соответственно, c – гипотенуза. Тогда $\sin \alpha = b/c = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos \alpha = a/c = k/\sqrt{k^2+1}$, где $k = a/b$ – заданное отношение катетов.

Если R – искомый радиус описанного круга, то $c = 2R$, поэтому площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sin \alpha \cos \alpha c^2 = \sin \alpha \cos \alpha Rc = \frac{kRc}{k^2+1}.$$

Однако площадь S можно вычислить и другим способом по формуле $S = pr$, где полупериметр $p = \frac{1}{2}(c + a + b) = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)c$. Следовательно,

$$\frac{kRc}{k^2+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \right) rc,$$

откуда легко найти R :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2k} \sqrt{k^2+1} (\sqrt{k^2+1} + k + 1) r = \\ &= \frac{r}{2k} (k^2 + 1 + (k+1)\sqrt{k^2+1}). \end{aligned}$$

11.

Решение. Прямым вычислением убеждаемся в том, что

$$7^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 49 + \frac{256}{81} = \frac{3969 + 256}{81} = \frac{4225}{81} = \left(\frac{65}{9}\right)^2.$$

Тогда по теореме косинусов для угла α , противолежащего стороне длиной $65/9$, получаем $\cos \alpha = 0$, поэтому $\alpha = \pi/2$, т.е. данный треугольник прямоугольный.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{16}{9} = \frac{56}{9}$, поэтому $S + 16/9 = 56/9 + 16/9 = 72/9 = 8 = 2^3$ — куб целого числа. Наконец, периметр треугольника $65/9 + 7 + 16/9 = 144/9 = 16 = 4^2$ — квадрат целого числа.

12.

Решение. Прямым вычислением убеждаемся в том, что

$$\left(\frac{621}{50}\right)^2 + 2^2 = \frac{385\,641}{2500} + 4 = \frac{395\,641}{2500} = \left(\frac{629}{50}\right)^2.$$

Тогда по теореме косинусов для угла α , противолежащего стороне длиной $629/50$, получаем, что $\cos \alpha = 0$, поэтому $\alpha = \pi/2$, т.е. данный треугольник прямоугольный.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{621}{50} = \frac{621}{50}$, поэтому

$$S + \frac{629}{50} = \frac{621 + 629}{50} = \frac{1250}{50} = 25 = 5^2$$

— квадрат целого числа. Наконец, его периметр равен $629/50 + 621/50 + 2 = 1250/50 + 2 = 25 + 2 = 27 = 3^3$ — куб целого числа.

13. $\frac{r}{\sqrt{2} \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}.$

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC точка O есть центр вписанного круга (рис. 15), $\angle ABC =$

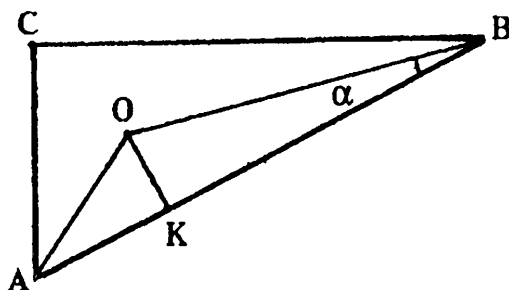


Рис. 15.

$= 2\alpha$, OK перпендикулярно гипотенузе AB . Следовательно, $\angle OVK = \alpha$ и $\angle OAK = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Тогда $KV = r \operatorname{ctg} \alpha$, $AK = r \operatorname{ctg}(\pi/4 - \alpha)$, поэтому

$$AB = AK + KB = \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \operatorname{ctg} \alpha \right) r = \\ = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha + \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \sin \alpha} r = \frac{r}{\sqrt{2} \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}.$$

14. $R^2 \sin 2\alpha$.

Решение. Так как гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанного круга, ее длина $c = 2R$, где R – заданный радиус этого круга. Следовательно, катеты треугольника $a = c \cos \alpha = 2R \cos \alpha$ и $b = c \sin \alpha = 2R \sin \alpha$, поэтому искомая площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha.$$

15. $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}l^2$.

Решение. Пусть a и b – катеты данного прямоугольного треугольника. Тогда $a + b = l$ – заданная величина. Кроме того, очевидно, что один из острых углов треугольника равен $\pi/3$, а другой – $\pi/6$. Если катет a лежит против угла, равного $\pi/6$, то $a/b = \operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, поэтому $b = \sqrt{3}a$. Подставляя в соотношение $a + b = l$, получаем $(1 + \sqrt{3})a = l$, т.е. $a = l/(1 + \sqrt{3})$. Отсюда следует, что второй катет $b = \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}l}{1+\sqrt{3}}$, а искомая площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}l}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}l^2}{2(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}l^2.$$

16. $2 \arcsin(3 - 2\sqrt{2})$.

Решение. Если r и R – радиусы заданных кругов ($r < R$), то отношение площадей кругов $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = 2$, поэтому $R =$

$= \sqrt{2}r$. Кроме того, если данный угол равен α , то

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $\alpha = 2 \arcsin (3 - 2\sqrt{2})$.

17. $\frac{4\sqrt{2S \operatorname{tg} \alpha}}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

Решение. Если a и b – катеты данного прямоугольного треугольника, причем катет a лежит против острого угла α , то $a/b = \operatorname{tg} \alpha$ и $ab = 2S$. Отсюда получаем $b^2 = \frac{2S}{\operatorname{tg} \alpha}$, поэтому $b = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{tg} \alpha}}$. Кроме того,

$$a = b \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{tg} \alpha}} \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2S \operatorname{tg} \alpha}.$$

Далее, если x – сторона вписанного квадрата, то $\frac{a-x}{x} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $a - x = x \operatorname{tg} \alpha$, откуда легко найти x : $x = \frac{a}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

Таким образом, $x = \frac{\sqrt{2S \operatorname{tg} \alpha}}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$, поэтому искомый периметр квадрата $4x = \frac{4\sqrt{2S \operatorname{tg} \alpha}}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

18. $\sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 16) основание $BC = a$, боковая сторона $AB = b$, $AD = h$ – высота, опущенная из вершины A . Тогда

$$\frac{BD}{AD} = \frac{a}{2h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

поэтому площадь треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2}ah = h^2 \left(\frac{a}{2h} \right) = h^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, высота $h = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}}$.

Далее, если x – сторона квадрата, то $EF = x/2$, поэтому из пропорции $\frac{EF}{BD} = \frac{AF}{AD}$ получаем $x/a = (h - x)/h$, откуда $hx = ah - ax$, $x(a + h) = ah$, $x = \frac{ah}{a + h}$. Подставляя в правую часть последнего соотношения $a = 2h \operatorname{tg}(\alpha/2)$, имеем

$$x = \frac{2h^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + h} = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, искомое расстояние

$$\begin{aligned} AE &= \frac{EF}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} (2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})}. \end{aligned}$$

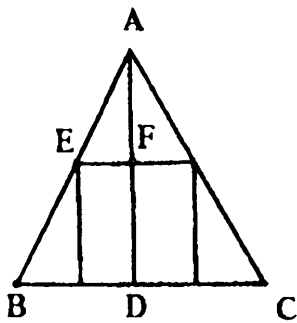


Рис. 16.

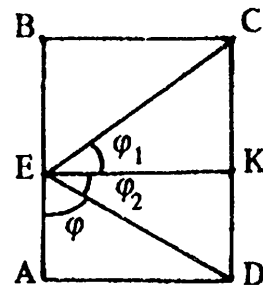


Рис. 17.

19. $AE = a - \sqrt{a^2 - b^2}$.

Решение. Пусть EK перпендикулярно стороне CD и $x = AE$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (рис. 17). Тогда $\operatorname{tg} \varphi = b/x$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = x/b$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = (a - x)/b$. Следовательно,

$$\frac{b}{x} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\frac{x}{b} + \frac{a-x}{b}}{1 - \frac{x(a-x)}{b^2}} = \frac{ab}{b^2 - x(a-x)},$$

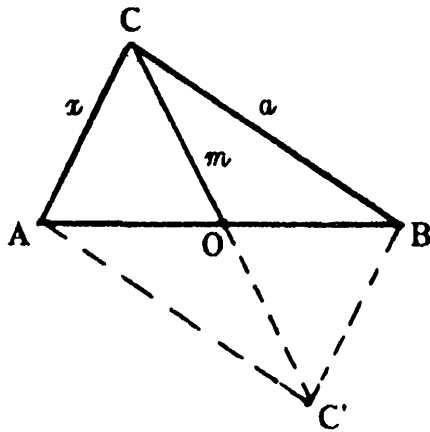
т.е. $abx = b(b^2 - x(a-x))$.

В результате получаем квадратное уравнение для определения x : $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, откуда $x = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$.

Отметим, что точка E лежит на стороне AB , поэтому справедливо неравенство $0 \leq x \leq a$ и, значит, решение $x = a + \sqrt{a^2 - b^2}$ является посторонним. Кроме того, отметим, что задача имеет решение только при $a^2 - b^2 \geq 0$, т.е. $a \geq b$.

$$20. AC = \frac{1 + \sqrt{16k^2 - 3}}{2(4k^2 - 1)} a \quad (k > 1/2).$$

Решение. Пусть $AC = x$, $BC = a$, медиана $CO = m$. На продолжении медианы CO рассмотрим точку C' , для которой $C'O = CO$ (рис. 18).



Тогда $ACBC'$ – параллелограмм. Воспользуемся законом параллелограмма:

$(2m)^2 + AB^2 = 2(x^2 + a^2)$.

Однако по теореме косинусов, примененной к треугольнику ACB , получаем соотношение

$$AB^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \frac{\pi}{3} = x^2 + a^2 - ax,$$

поэтому $4k^2 x^2 + x^2 + a^2 - ax = 2x^2 + 2a^2$, т.е. $(4k^2 - 1)x^2 - ax - a^2 = 0$. Условие разрешимости квадратного уравнения $1 + 4(4k^2 - 1) \geq 0$, т.е. $|k| \geq \sqrt{3}/4$. Корни квадратного уравнения

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{16k^2 - 3}}{2(4k^2 - 1)} a.$$

Здесь неравенство $1 - \sqrt{16k^2 - 3} > 0$ (вместе с условием $k > 0$) приводит к условию $0 < k < 1/2$, при котором оба

корни отрицательные. Если $k = 1/2$, то $x = -a$, т.е. решение снова отрицательное. Наконец, при $k > 1/2$ ($> \frac{\sqrt{3}}{4}$) решение $x = \frac{1 - \sqrt{16k^2 - 3}}{2(4k^2 - 1)}a < 0$, т.е. оно постороннее, а второе решение

$$x = \frac{1 + \sqrt{16k^2 - 3}}{2(4k^2 - 1)}a > 0.$$

Таким образом, при $k > 1/2$ единственным является решение задачи

$$AC = \frac{1 + \sqrt{16k^2 - 3}}{2(4k^2 - 1)}a.$$

21. $(\sqrt{6} - 2)a$.

Решение. Пусть $x = OC$ – расстояние от центра окружности O до вершины C треугольника ABC (рис. 19). Тогда имеем два соотношения для радиуса окружности:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 - 2\frac{ax}{2} \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{a^2}{4} + x^2 - \frac{ax}{2}, \\ r &= (a - x) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}(a - x)}{2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{3}{4}(a - x)^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 - \frac{ax}{2}.$$

Из последнего соотношения в результате преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 + 4ax - 2a^2 = 0$. Следовательно, $x = (-2 \pm \sqrt{6})a$. Здесь корень $x = -(2 + \sqrt{6})a$ является посторонним, а $x = (\sqrt{6} - 2)a$ есть решение задачи.

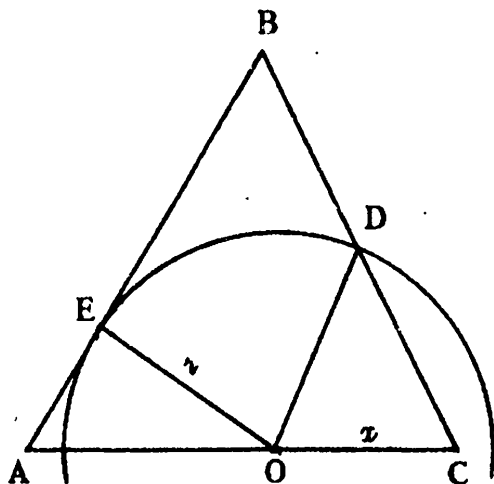


Рис. 19.

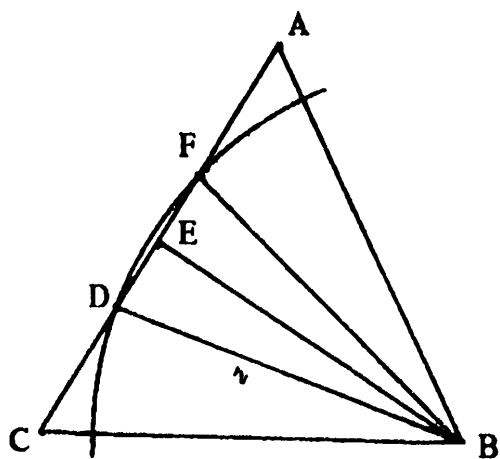


Рис. 20.

22. $\frac{\sqrt{7}}{3}a$.

Решение. Так как треугольник равнобедренный (рис. 20), его боковые стороны равны. Доказав равенство боковой стороны основанию, мы докажем, что заданный треугольник является равносторонним. Действительно, треугольник BDF равнобедренный, поэтому углы при вершинах D и F равны. Отсюда следует, что и внешние углы при этих вершинах равны, поэтому треугольники CDB и AFB равны по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, доказано, что $AB = CB$, т.е. треугольник ABC равносторонний. Высота этого треугольника $EB = BC \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, поэтому из соотношения $EB^2 + DE^2 = BD^2$ получаем

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 + \left(\frac{a}{6} \right)^2 = \frac{7}{9}a^2.$$

Следовательно, $r = \frac{\sqrt{7}}{3}a$.

23. $\frac{3}{14}$.

Решение. Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} BC \cdot (AB \sin \beta)$, а площадь треугольника DBE равна $\frac{1}{2} BE \cdot (DB \sin \beta)$, поэтому отношение площадей

$k = \frac{BE \cdot DB}{BC \cdot AB}$. Однако по условию задачи $DB = \frac{3}{4}AB$ и $BE = \frac{2}{7}BC$. Следовательно, искомое отношение $k = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{14}$.

24. $\frac{11}{9}$.

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} AC \cdot (AB \sin \alpha)$, а площадь треугольника APM равна $\frac{1}{2} AM \cdot (AP \sin \alpha)$, поэтому отношение площадей $\frac{1}{5} = \frac{AM \cdot AP}{AC \cdot AB}$. Однако по условию задачи $AP = \frac{4}{11}AB$, поэтому получаем $\frac{4}{11} \frac{AM}{AC} = \frac{1}{5}$, т.е. $\frac{AM}{AC} = \frac{11}{20}$. Следовательно, искомое отношение

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AM}{AC - AM} = \frac{\frac{AM}{AC}}{1 - \frac{AM}{AC}} = \frac{\frac{11}{20}}{1 - \frac{11}{20}} = \frac{11}{9}.$$

25. $\frac{ac}{b+c}, \frac{ab}{b+c}$.

Решение. Пусть $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ и AD — биссектриса угла при вершине A . Тогда $\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}$. Если это отношение обозначить k , то $BD = kc$, $DC = kb$, поэтому $a = BD + DC = k(c + b)$ и $k = a/(c + b)$. Таким образом,

$$BD = kc = \frac{ac}{b+c} \quad \text{и} \quad DC = kb = \frac{ab}{b+c}.$$

26. $\frac{ab}{|c-b|}, \frac{ac}{|c-b|}$ ($b \neq c$).

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Считая, что $c > b$, рассмотрим биссектрису AD внешнего угла при вершине A (рис. 21). Тогда $\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b}$. Следовательно, если это отношение обозначить k , то $BD = kc$, $CD = kb$, поэтому $a = BC = BD - CD = k(c - b)$.

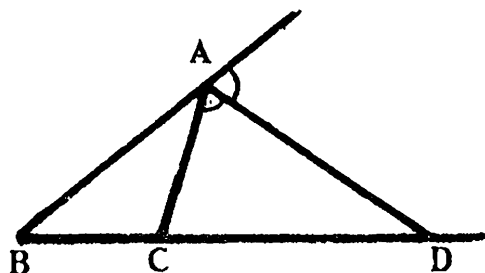


Рис. 21.

В результате получаем $k = \frac{a}{c-b}$. Таким образом,

$$BD = kc = \frac{ac}{c-b}, \quad CD = kb = \frac{ab}{c-b}.$$

Если $c < b$, то решение аналогичное. Отметим также, что в случае, когда $c = b$, треугольник ABC равнобедренный поэтому биссектриса внешнего угла параллельна основанию

$$27. \frac{8R^2 \sin^2 \alpha}{(1 + 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2}.$$

Решение. Пусть O – центр описанного круга, CD – высота треугольника ABC , опущенная из вершины C (рис. 22) Угол при вершине C равен α , $OC = OB = R$ – радиус описанного круга. Тогда из треугольника BOC получаем $BC = 2R \cos(\alpha/2)$, а из треугольника BDC – $CD = BC \cdot \cos(\alpha/2) = 2R \cos^2(\alpha/2)$.

Пусть $x = MN$ – половина меньшей стороны прямоугольника.

Из треугольника MCN имеем

$$\frac{x}{CD - DM} = \frac{x}{2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4x} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

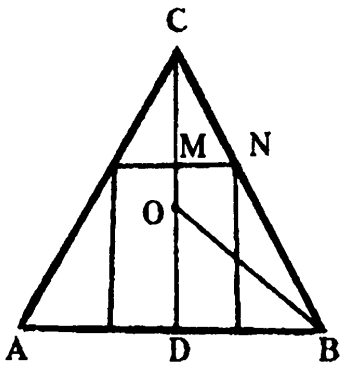


Рис. 22.

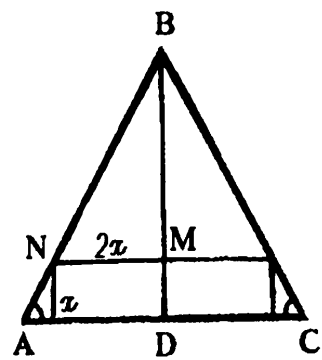


Рис. 23.

поэтому

$$x = \frac{R \sin \alpha}{1 + 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Но тогда искомая площадь прямоугольника равна

$$2x \cdot 4x = \frac{8R^2 \sin^2 \alpha}{(1 + 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2}.$$

$$28. \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{(2 + \operatorname{ctg} \alpha)^2} r^2.$$

Решение. Пусть $a = BC = AB$ – боковая сторона равнобедренного треугольника ABC , α – угол при основании (рис. 23). Тогда основание $AC = 2AD = 2AB \cos \alpha = 2a \cos(\alpha)$, поэтому полупериметр

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(2a + 2a \cos \alpha) = \\ &= a(1 + \cos \alpha) = 2a \cos^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

Следовательно, площадь треугольника

$$S = AD \cdot BD = pr = 2ar \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

поэтому $a \cos \alpha \cdot BD = 2ar \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, откуда находим $BD = \frac{2r \cos^2(\alpha/2)}{\cos \alpha}$.

Пусть x – длина меньшей стороны вписанного прямоугольника. Тогда $NM = 2x$ и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{NM} = \frac{BD - MD}{NM} = \frac{BD - x}{2x}.$$

Следовательно, $(2 \operatorname{tg} \alpha + 1)x = BD$, т.е.

$$x = \frac{BD}{2 \operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2r \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha (2 + \operatorname{ctg} \alpha)} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

В результате получаем, что искомая площадь вписанного прямоугольника

$$4x^2 = \frac{4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{(2 + \operatorname{ctg} \alpha)^2}.$$

29. $\frac{2\sqrt{2}}{5}a$.

Решение. Пусть $x = MF$ (рис. 24). Тогда из отношения $\frac{CK}{KF} = \frac{1}{4}$ следует, что $KF = \frac{4}{5}CF = \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2}{5}a$, а $KD = \frac{a}{2} + \frac{2}{5}a = \frac{9}{10}a$. Кроме того, в подобных треугольниках KND и KMF

$$\frac{ND}{MF} = \frac{KD}{KF} = \frac{\frac{9}{10}a}{\frac{2}{5}a} = \frac{9}{4},$$

поэтому $ND = \frac{9}{4}x$, $EM = a - x$, $AN = a - \frac{9}{4}x$. Таким образом, площадь четырехугольника $EMNA$ равна

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{EM + AN}{2} = \frac{a}{2} \left(a - \frac{13}{8}x \right),$$

поэтому

$$\frac{a}{2} \left(a - \frac{13}{8}x \right) = \frac{7}{40}a^2,$$

откуда легко найти x : $x = \frac{2}{5}a$.

В результате получаем $MF = FK$, т.е. треугольник MKF прямоугольный и равнобедренный, поэтому его гипотенуза $MK = \sqrt{2}KF = \frac{2\sqrt{2}}{5}a$.

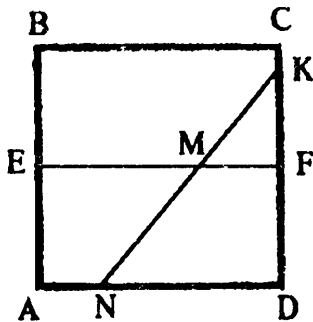


Рис. 24.

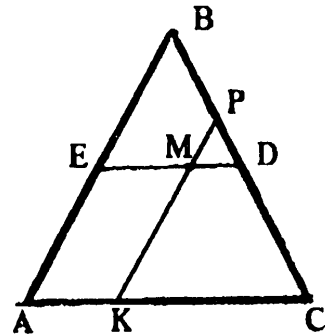


Рис. 25.

30. $a/8$.

Решение. Так как ED — средняя линия треугольника ABC (рис. 25), имеем $ED = \frac{a}{2}$, $BD = DC = \frac{a}{2}$. По условию задачи $\frac{PD}{PB} = \frac{1}{3}$, поэтому $PD =$

$= \frac{1}{4}BD = \frac{a}{8}$. Кроме того, в подобных треугольниках MPD и KPC

$$\frac{MD}{KC} = \frac{PD}{PC} = \frac{a}{8} : \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{8} \right) = \frac{1}{5},$$

поэтому $MD = \frac{1}{5}KC$.

Пусть $x = AK$. Тогда $KC = a - x$, поэтому

$$EM = \frac{a}{2} - \frac{1}{5}KC = \frac{a}{2} - \frac{1}{5}(a - x) = \frac{3}{10}a + \frac{x}{5}.$$

В результате получаем, что площадь четырехугольника $AEMK$ определяется как

$$\begin{aligned} \frac{EM + AK}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a &= \frac{\sqrt{3}}{8}a \left(\frac{3}{10}a + \frac{x}{5} + x \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}a \left(\frac{3}{10}a + \frac{6}{5}x \right), \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\sqrt{3}}{8}a \left(\frac{3}{10}a + \frac{6}{5}x \right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

т.е. $\frac{3}{10}a + \frac{6}{5}x = \frac{3}{4}a$, $\frac{6}{5}x = \frac{9}{20}a$, $x = \frac{3}{8}a$. Следовательно,

$$EM = \frac{3}{10}a + \frac{x}{5} = \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{40} \right) a = \frac{3}{8}a,$$

поэтому $EM = AK$, откуда получаем, что KP параллельно AB , т.е. треугольник MPD равносторонний.

Таким образом, искомая величина $MP = PD = \frac{a}{8}$.

$$31. \frac{(b+c)c}{a+b+c}.$$

Решение. Пусть в треугольнике ABC даны длины сторон: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Обозначим искомую величину $AD = x$. В подобных треугольниках ABC и ADE имеет место пропорция $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, т.е. $\frac{x}{c} = \frac{DE}{a} = \frac{AE}{b}$. Следовательно, $DE = \frac{ax}{c}$, $AE = \frac{bx}{c}$. Кроме того, $BD =$

$= AB - AD = c - x$, $EC = AC - AE = b - \frac{bx}{c}$, поэтому из условия $DE = BD + EC$ получаем уравнение для определения неизвестной x : $\frac{ax}{c} = c - x + (b - \frac{bx}{c})$.

Таким образом, $x = \frac{(b+c)c}{a+b+c}$.

32. $bc/(a+b)$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC даны длины сторон $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Обозначим искомую величину $AD = x$.

По условию задачи в параллелограмме $EDFC$ стороны ED и CF равны, поэтому данный параллелограмм является ромбом, т.е. $ED = DF = FC = EC$. Далее, в подобных треугольниках ABC и DBF справедливо соотношение $\frac{DB}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{BF}{BC}$, т.е. $\frac{c-x}{c} = \frac{DF}{b} = \frac{a-DF}{a}$. Тогда из уравнения $\frac{DF}{b} = \frac{a-DF}{a}$ получаем $a \cdot DF = b(a - DF)$, $(a+b)DF = ab$, поэтому $DF = \frac{ab}{a+b}$. В результате имеем уравнение для определения x : $\frac{c-x}{c} = \frac{a}{a+b}$, откуда

$$x = c - \frac{ac}{a+b} = \frac{bc}{a+b}.$$

33. $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 6b^2 - 8m_c^2},$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + 6a^2 - 8m_c^2}.$$

Решение. Продолжим медиану CD и на продолжении отложим отрезок $DE = CD = m_c$ (рис. 26). Тогда $ACBE$ - параллелограмм. Следовательно, из закона параллелограмма имеем соотношение

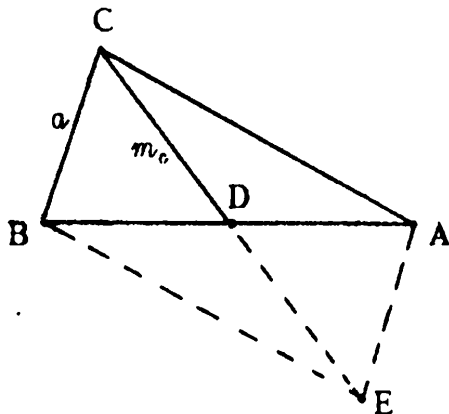


Рис. 26.

$$c^2 + 4m_c^2 = 2(a^2 + b^2),$$

где $c = AB$. Аналогично получаем соотношение для другой медианы m_a : $a^2 + 4m_a^2 = 2(c^2 + b^2)$,

поэтому

$$a^2 + 4m_a^2 = 2(2a^2 + 2b^2 - 4m_c^2 + b^2), \quad 4m_a^2 = 3a^2 + 6b^2 - 8m_c^2.$$

Таким образом, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 6b^2 - 8m_c^2}$. Наконец, медиана m_b определяется таким же способом.

$$34. (b+c)\sqrt{1 - \frac{l_a^2}{bc}}.$$

Решение. Пусть в треугольнике ABC даны $b = AC$, $c = AB$ и биссектриса $l_a = AD$. Тогда $\frac{CD}{b} = \frac{DB}{c}$. Кроме того, если α — угол при вершине A , то по теореме косинусов, примененной к треугольникам ADC и ABD , получаем соотношения

$$CD^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad DB^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$2l_a \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{c^2 + l_a^2 - DB^2}{c} = \frac{b^2 + l_a^2 - CD^2}{b},$$

т.е. $b(c^2 + l_a^2 - DB^2) = c(b^2 + l_a^2 - CD^2)$. В результате для неизвестной $x = DB$ имеем уравнение

$$b(c^2 + l_a^2 - x^2) = c\left(b^2 + l_a^2 - \left(\frac{bx}{c}\right)^2\right),$$

так как $CD = \frac{bx}{c}$. Но из уравнения в результате преобразований получаем

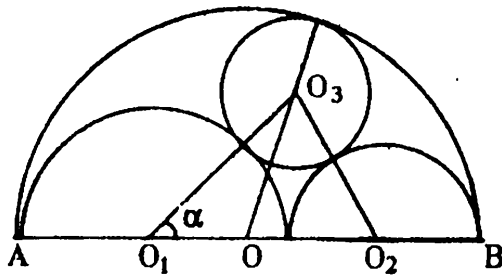
$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{b^2}{c} - b \right) &= c(b^2 + l_a^2) - b(c^2 + l_a^2) = bc(b - c) + (c - b)l_a^2, \\ \frac{bx^2}{c}(b - c) &= bc(b - c) \left(1 - \frac{l_a^2}{bc} \right), \\ x^2 &= c^2 \left(1 - \frac{l_a^2}{bc} \right), \quad x = c\sqrt{1 - \frac{l_a^2}{bc}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$CB = BD + CD = (b + c)\sqrt{1 - \frac{l_a^2}{bc}}.$$

35. $\frac{ab(a+b)}{2(a^2+ab+b^2)}.$

Решение. Пусть O – центр большой полуокружности, O_1 и O_2 – центры двух других полуокружностей, O_3 – центр вписанной окружности (рис. 27). Через x обозначим радиус вписанной окружности. Тогда имеем соотношения $O_1O_3 = \frac{a}{2} + x$,



$$O_2O_3 = \frac{b}{2} + x, \quad O_3O = \frac{a+b}{2} - x.$$

Рис. 27.

Пусть $\angle O_3O_1O = \alpha$. По теореме косинусов, примененной к треугольникам $O_1O_3O_2$ и O_1O_3O , получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2} + x\right)\frac{a+b}{2}\cos\alpha, \\ \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \frac{b^2}{4} - 2\left(\frac{a}{2} + x\right)\frac{b}{2}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a}{2} + x\right)\cos\alpha &= \frac{2}{a+b} \left(\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 \right) = \frac{2}{b} \left(\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \frac{b^2}{4} - \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем уравнение для x :

$$\frac{1}{a+b} \left(\frac{a^2}{2} + (a-b)x + \frac{ab}{2} \right) = \frac{1}{b} \left(2ax - \frac{ab}{2} + bx \right),$$

поэтому

$$\frac{a}{2} + \frac{a-b}{a+b}x = -\frac{a}{2} + x \left(\frac{2a}{b} + 1 \right),$$

$$a = x \left(\frac{2a}{b} + 1 - \frac{a-b}{a+b} \right) = x \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{b(a+b)}.$$

Таким образом, $x = \frac{ab(a+b)}{2(a^2 + ab + b^2)}.$

36. $\frac{1}{4}(a+b)^2.$

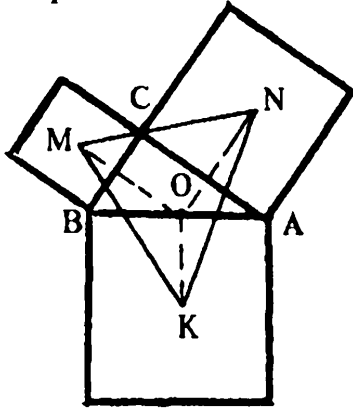


Рис. 28.

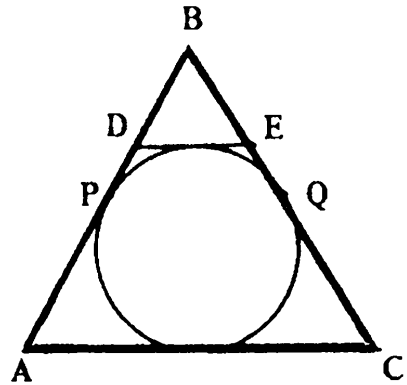


Рис. 29.

Решение. Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник с катетами $a = BC$ и $b = AC$, точки M , N и K – центры квадратов, $BO = OA$ (рис. 28). Если $\alpha = \angle BAC$, то $\angle NOK = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \pi - \alpha$ и $\angle KOM = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Искомая площадь равна сумме площадей треугольников KOM , MON и OKN , т.е.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a}{c} =$$

$$= \frac{(a+b)b}{8} + \frac{1}{8}(a+b)^2 + \frac{(a+b)a}{8} = \frac{1}{4}(a+b)^2.$$

37. 6 см, 3 см.

Решение. Пусть основание треугольника $AC = x$, DE – указанный в условии задачи отрезок касательной, P и Q – точки на боковых сторонах треугольника, в которых окружность касается AB и BC (рис. 29). Тогда $AP + QC = AC = x$, $PD + EQ = DE = 2$, поэтому $18 = x + (AD + EC) + (DB + BE) = 2x + 2 + (DB + BE)$. Кроме того, $\frac{DB+BE}{AB+BC} = \frac{2}{x}$, т.е. $DB + BE = \frac{2}{x}(18 - x)$. Следовательно, для неизвестной x имеем уравнение $18 = 2x + 2 + \frac{2}{x}(18 - x)$, которое можно записать в виде $x^2 - 9x + 18 = 0$. Таким образом,

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 3.$$

38. 2 см, 1,5 см.

Решение. Пусть D и E – точки касания боковых сторон AB и BC треугольника ABC (рис. 30). Так как по условию треугольник ABC равнобедренный, отрезок DE параллелен основанию AC . Кроме того, $AD + EC = AF + FC = AC$. Пусть $AC = x$. Тогда

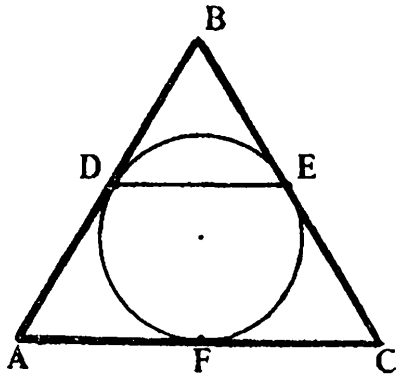


Рис. 30.

$$\frac{DE}{AC} = \frac{1}{x} = \frac{DB + BE}{AB + BC} = \frac{6 - 2x}{6 - x},$$

$$\text{т.е. } 6 - x = 2(3 - x)x.$$

Следовательно, для неизвестной x получаем квадратное уравнение $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

Таким образом,

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

39. $\frac{3k \pm \sqrt{12k - 3k^2}}{6k} a \quad (1 < k \leq 4).$

Решение. Пусть $x = AA' = BB' = CC'$ (рис. 31). Треугольники $A'AC'$, $C'CB'$ и $B'BA'$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $A'B' = B'C' = A'C'$, поэтому треугольник $A'B'C'$ равносторонний. Тогда по теореме косинусов имеем $A'C'^2 = AA'^2 + AC'^2 - 2AA' \cdot AC' \cos \frac{\pi}{3} = x^2 + (a - x)^2 - x(a - x) = 3x^2 - 3ax + a^2$.

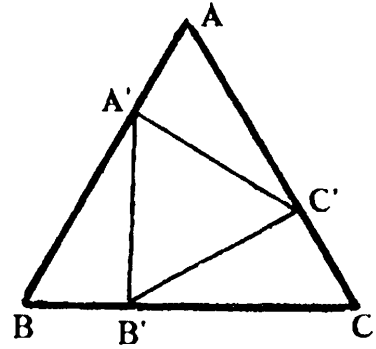


Рис. 31.

Следовательно, отношение площадей треугольников $A'B'C'$ и ABC равно

$$\frac{A'C'^2}{AC^2} = \frac{3x^2 - 3ax + a^2}{a^2} = \frac{1}{k},$$

откуда для неизвестной x получаем квадратное уравнение

$$3kx^2 - 3akx + (k - 1)a^2 = 0.$$

Таким образом,

$$x = \frac{3k \pm \sqrt{12k - 3k^2}}{6k} a.$$

По условию задачи $k > 1$. Кроме того, необходимо считать, что $12k - 3k^2 \geq 0$, т.е. $k \leq 4$. Если $k \in (1, 4]$, то оба решения квадратного уравнения удовлетворяют неравенству $0 < x < a$, поэтому они являются решениями задачи. Отметим, что при $k = 4$ треугольник $A'B'C'$ образован средними линиями данного треугольника, так как $x = a/2$.

40. $\sqrt{3d^2 - 2a^2} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \leq d < a \right).$

Решение. По условию задачи четырехугольник $APDQ$ является параллелограммом (рис. 32), в котором задана диагональ $AD = d$ и требуется найти другую диагональ $PQ = x$. Для этого воспользуемся законом параллелограмма $x^2 + d^2 = AP^2 + PD^2 + DQ^2 + AQ^2$, т.е. $x^2 + d^2 = 2(AP^2 + PD^2)$. Треугольник BDP равносторонний, $PD = BD = PB$, поэтому последнее соотношение можно записать в виде

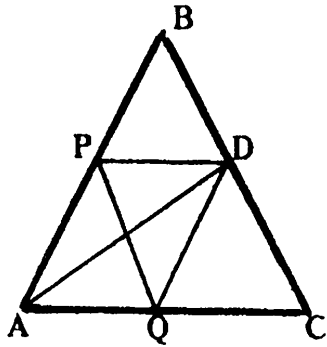


Рис. 32.

$$x^2 + d^2 = 2((a - BD)^2 + BD^2).$$

Чтобы определить BD , воспользуемся теоремой косинусов, согласно которой в треугольнике ABD

$$\begin{aligned} d^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= a^2 + BD^2 - a \cdot BD, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} (a - BD)^2 + BD^2 &= a^2 + 2(BD^2 - a \cdot BD) = \\ &= a^2 + 2(d^2 - a^2) = 2d^2 - a^2. \end{aligned}$$

В результате получаем $x^2 + d^2 = 4d^2 - 2a^2$, т.е. $x^2 = 3d^2 - 2a^2$ и $x = \sqrt{3d^2 - 2a^2}$.

$$41. \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2} + 2a} \quad (b > \frac{a}{2} > 0).$$

Решение. В равнобедренном треугольнике ABC (рис. 33) основание $BC = a$, боковая сторона $AC = b$. Тогда высота $AG = \sqrt{AC^2 - CG^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Пусть $x = ED = FG$ - искомая сторона квадрата. Из подобия треугольников ABC и ADE получаем соотношение $\frac{ED}{AF} = \frac{BC}{AG}$, т.е. $\frac{x}{AG-x} = \frac{a}{AG}$, откуда $x \cdot AG = a(AG - x)$, $x(AG + a) = a \cdot AG$.

Следовательно,

$$x = \frac{a \cdot AG}{AG + a} = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2/4}}{\sqrt{b^2 - a^2/4} + a} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2} + 2a} \quad (b > \frac{a}{2} > 0).$$

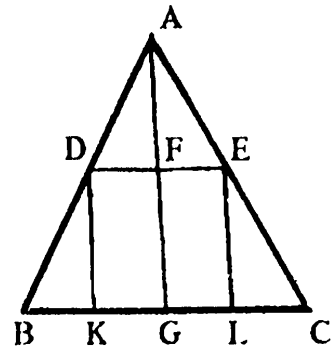


Рис. 33.

$$42. \frac{ab}{a^2 + ab + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Решение. Пусть $AB = c$ - гипотенуза прямоугольного треугольника ABC , $ED = x$ - искомая длина стороны вписанного квадрата (рис. 34). Высоту $CG = h$ легко найти, рассмотрев подобные треугольники BGG и ABC : $\frac{CG}{BC} =$

$$= \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } h = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{ba}{c}.$$

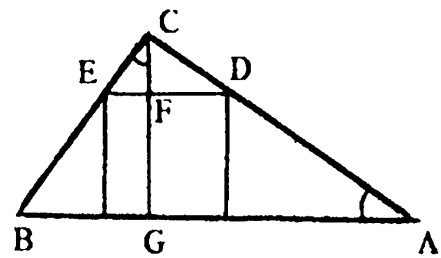


Рис. 34.

Кроме того, в подобных треугольниках ABC и DEC высоты относятся так же, как и основания. Учитывая, что $ED = FG = x$, $CF = h - x$, получаем $\frac{h-x}{h} = \frac{x}{c}$, т.е.

$$1 = x \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{c} \right),$$

$$x = \frac{hc}{h+c} = \frac{\frac{ab}{c}c}{\frac{ab}{c}+c} = \frac{ab}{ab+c^2}c = \frac{ab}{a^2+ab+b^2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

43. $\frac{4}{25}p^2$.

Решение. Пусть $b = AD = EK$ — одна из сторон прямоугольника $ABCD$ (рис. 35). Так как угол EDF прямой, DF перпендикулярно DE . Кроме того, KD перпендикулярно KE , поэтому углы FDK и KED равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, прямоугольные треугольники KDF и KED подобны. Но из подобия этих треугольников получаем соотношение $\frac{DK}{EK} = \frac{KF}{DK}$,

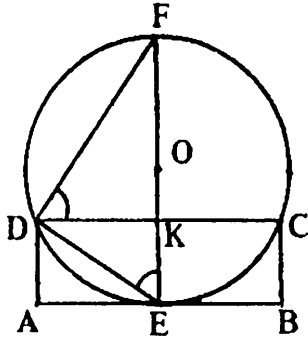


Рис. 35.

т.е. $DK^2 = EK \cdot KF$.

По условию задачи $EF = p$ и $2b + 4DK = 2p$, поэтому $KF = EF - EK = p - b$, $DK = \frac{1}{2}(p - b)$. Следовательно, соотношение $DK^2 = EK \cdot KF$ можно записать в виде $\frac{1}{4}(p - b)^2 = b(p - b)$, откуда $p^2 - 2pb + b^2 = 4bp - 4b^2$, т.е. $5b^2 - 6pb + p^2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два решения: $b = p$ и $b = \frac{1}{5}p$.

Наконец, вторая сторона прямоугольника $AB = a = p - b = p - \frac{1}{5}p = \frac{4}{5}p$. Здесь корень $b = p$ является посторонним, так как он приводит к равенству $a = 0$.

Таким образом, искомая площадь прямоугольника $S = ab = \frac{4}{25}p^2$.

44. $3pl - (p + l)\sqrt{2pl}$ ($2p > l > p$).

Решение. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ длина диагонали $BD = d$, длины сторон $AD = BC = a$ и $AB = CD = b$ ($a < b$). Тогда по условию задачи $a + d = p$, $b + d = l$. Так как треугольник ABD прямоугольный, по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = d^2$, поэтому $(p - d)^2 + (l - d)^2 = d^2$, т.е.

$d^2 - 2(p + l)d + (p^2 + l^2) = 0$ – квадратное уравнение для определения d . Следовательно,

$$d = p + l \pm \sqrt{(p + l)^2 - p^2 - l^2} = p + l \pm \sqrt{2pl}.$$

Отметим, что $d < p$ и $d < l$, поэтому $d = p + l - \sqrt{2pl}$, а корень квадратного уравнения $d = p + l + \sqrt{2pl}$ является посторонним.

С помощью p , l и d легко найти стороны прямоугольника a и b :

$$\begin{aligned} a &= p - d = p - (p + l - \sqrt{2pl}) = \sqrt{2pl} - l, \\ b &= l - d = l - (p + l - \sqrt{2pl}) = \sqrt{2pl} - p. \end{aligned}$$

Очевидно, что $a > 0$, т.е. $\sqrt{2pl} - l > 0$, поэтому $2p > l$.

Таким образом, искомая площадь

$$S = ab = (\sqrt{2pl} - l)(\sqrt{2pl} - p) = 3pl - (p + l)\sqrt{2pl}.$$

$$45. \sqrt{\frac{3}{5}(l^2 - c^2)}, \quad \sqrt{\frac{5}{3}(l^2 - c^2)}.$$

Решение. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 36) боковая сторона $AD = c$, а диагональ $AC = l$. Пусть DE и CF – высоты трапеции, S_1 и S_2 – площадь треугольников ACD и ABC соответственно. Если $CD = a$ и $AB = b$ – искомые величины, то $AE = \frac{1}{2}(b - a)$, $AF = \frac{1}{2}(a + b)$. Так как треугольники ACD и ABC имеют равную высоту, отношение площадей этих треугольников совпадает с отношением сторон CD и AB . Следовательно, $a : b = 3 : 5$, поэтому $a = \frac{3}{5}b$, $AF = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{4}{5}b$, $AE = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{5}b$.

По теореме Пифагора для треугольника ADE имеем $h = DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{25}b^2}$, а для треугольника ACF — $h = CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{l^2 - \frac{16}{25}b^2}$. Следовательно,

$$c^2 - \frac{b^2}{25} = l^2 - \frac{16b^2}{25}, \quad \frac{3}{5}b^2 = l^2 - c^2,$$

поэтому

$$b = \sqrt{\frac{5}{3}(l^2 - c^2)}, \quad a = \sqrt{\frac{3}{5}(l^2 - c^2)}.$$

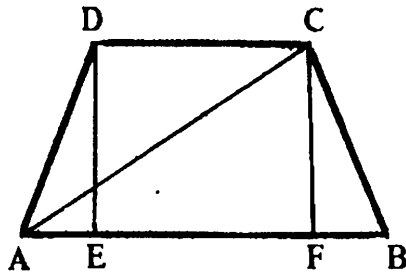


Рис. 36.

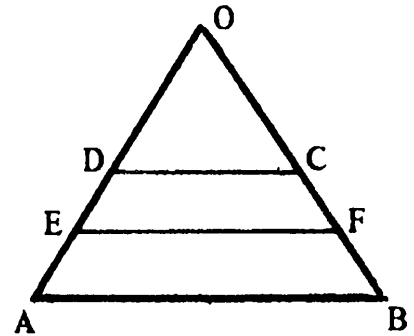


Рис. 37.

46. $\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}.$

Решение. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, EF – средняя линия трапеции, O – точка пересечения продолжений боковых сторон (рис. 37). Если $a = CD$, $b = AB$ и $l = EF$, а S , S_1 и S_2 – площади треугольника COD , трапеции $EFCD$ и трапеции $ABFE$ соответственно, то

$$\frac{S + S_1}{S} = \frac{l^2}{a^2}, \quad \frac{S + S_1 + S_2}{S} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}.$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$\frac{S_1}{S} = \frac{l^2 - a^2}{a^2}, \quad \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5},$$

поэтому

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = \frac{b^2 - a^2}{l^2 - a^2}.$$

Однако левая часть последнего соотношения

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = 1 + \frac{S_2}{S_1} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3},$$

поэтому $\frac{b^2 - a^2}{l^2 - a^2} = \frac{8}{3}$. Кроме того, $l = \frac{a+b}{2}$, откуда получаем $b = 2l - a$ и $b^2 - a^2 = 4(l^2 - al)$. Следовательно, $\frac{l^2 - al}{l^2 - a^2} = \frac{2}{3}$, т.е. $3l^2 - 3al = 2l^2 - 2a^2$, что дает квадратное уравнение для определения a : $2a^2 - 3al + l^2 = 0$. Его решения $a = l$ и $a = l/2$, причем $a = l$ является посторонним.

Таким образом, $a = l/2$ и $b = 2l - a = \frac{3}{2}l$.

47. 1) Если $0 < k < 1$, то $\frac{4(1+k)}{3k+1}S$,

2) если $k > 1$, то $\frac{4(1+k)}{3+k}S$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, F – точка пересечения диагонали AC и средней линии EQ , $EF : FQ = k$ и $0 < k < 1$. Пусть S_1 – площадь треугольника AEF , S_2 – площадь трапеции $EFCD$, S_3 – площадь треугольника CFQ , S_4 – площадь трапеции $ABQF$.

Ясно, что $S_2 + S_3 = S$. Так как EQ – средняя линия трапеции, EF является средней линией треугольника ACD , поэтому $CD = 2EF$, $S_1 + S_2 = 4S_1$, откуда $S_2 = 3S_1$. Аналогично FQ – средняя линия треугольника ABC , поэтому $AB = 2FQ$ и $S_4 = 3S_3$. Наконец, треугольники ACD и ABC имеют равную высоту, поэтому

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{4S_1}{4S_3} = \frac{CD}{AB} = \frac{EF}{FQ} = k,$$

откуда $S_1 = kS_3$.

Таким образом, $S = S_2 + S_3 = 3S_1 + S_3 = (3k + 1)S_3$, т.е. $S_3 = \frac{S}{3k+1}$, а искомая площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4(S_1 + S_3) = 4(k + 1)S_3 = \frac{4(k + 1)}{3k + 1}S.$$

Отметим, что если $k > 1$, то, рассмотрев обратное отношение $1/k$, получим

$$\frac{4\left(\frac{1}{k} + 1\right)}{\frac{3}{k} + 1}S = \frac{4(1 + k)}{3 + k}S.$$

48. $(1+k)S$, если $0 < k < 1$; $(1+k)\frac{S}{k}$, если $k > 1$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, E – точка пересечения диагоналей AC и BD . Тогда по условию задачи $\frac{EC}{AE} = \frac{ED}{BE} = k$, где предполагается, что $0 < k < 1$. Пусть S_1 , S_2 , S_3 и S_4 – площадь треугольников ABE , CDE , AED и BCE соответственно. Очевидно, что $S_3 = S_4$. Кроме того, в подобных треугольниках AEB и CED из условия $\frac{EC}{AE} = k$ следует, что $\frac{S_2}{S_1} = k^2$. Наконец, в треугольнике ABD боковая сторона DB делится точкой E в отношении k , поэтому $S_3 = kS_1$.

Так как $S_1 + S_3 = S$, то $(1+k)S_1 = S$. Следовательно, искомая площадь трапеции равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + 2S_3 = S + S_2 + S_3 = S + k^2S_1 + kS_1 = S + k(k+1)S_1 = S + kS = (1+k)S$.

В заключение отметим, что в случае, когда $k > 1$, можно рассмотреть обратное отношение $k_1 = 1/k$. В этом случае получаем площадь трапеции, равную $(1+k_1)S = \frac{1+k}{k}S$.

49. $2\sqrt{2k-1}R$ ($1/2 < k < 1$).

Решение. Пусть $ABCD$ – данная трапеция (рис. 38), S , T , L , Q – точки касания трапеции вписанной окружностью.

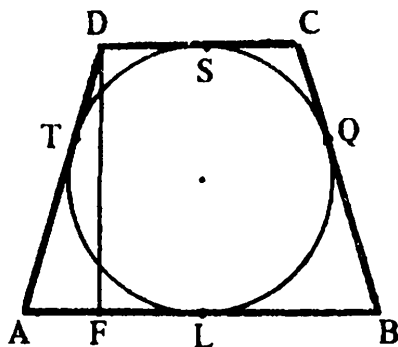


Рис. 38.

Тогда $SD = DT$, $AT = AL$, $BL = BQ$, $CQ = CS$, при этом $DT = CQ$, $AT = BQ$. Отсюда следует, что

$$2AD = AD + BC = CD + AB.$$

Пусть $x = CD$ – искомая величина, $y = AD$ и $z = AB$.

Тогда $y/z = k$, $x+z = 2y$, откуда получаем, что $y = kz$, $x+z = 2kz$, т.е. $x = (2k-1)z$ ($k > 1/2$).

Пусть отрезок DF перпендикулярен основанию AB . Тогда $DF = 2R$, где R – радиус вписанной в трапецию окружности. Кроме того, $AF = \frac{1}{2}(z-x) = \frac{1}{2}(z - (2k-1)z) =$

$= (1 - k)z$ ($0 < k < 1$), а по теореме Пифагора для треугольника ADF квадрат гипотенузы $AD^2 = DF^2 + AF^2$, т.е. $k^2 z^2 = 4R^2 + (1 - k)^2 z^2$, $4R^2 = (k^2 - (1 - k)^2)z^2 = (2k - 1)z^2$. Таким образом,

$$z = \frac{2R}{\sqrt{2k - 1}}, \quad x = (2k - 1)z = 2\sqrt{2k - 1}R.$$

50. $\frac{l}{1-k}, \frac{kl}{1-k}$, если $0 < k < 1$; $\frac{kl}{k-1}, \frac{l}{k-1}$, если $k > 1$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данная равнобедренная трапеция, AB и CD – ее основания, E – точка пересечения продолжения боковых сторон AD и BC . Для определенности считаем, что $\frac{CD}{AB} = k$ и $0 < k < 1$. Тогда $CD < AB$ и точка E лежит на продолжении боковой стороны AD за точкой D . Так как $AB + CD = 2l$, то $AB = \frac{2l}{1+k}$ и $CD = \frac{2kl}{1+k}$.

Далее, в подобных треугольниках ABE и DCE имеем равенство $\frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AB} = k$, поэтому $DE = kAE$. Но $AE = AD + DE = AD + kAE$, откуда $AD = (1 - k)AE$, т.е. искомое расстояние от точки E до вершины A трапеции $AE = \frac{1}{1-k}AD$, а расстояние от точки E до вершины D трапеции $DE = \frac{k}{1-k}AD$.

Наконец, отметим, что окружность можно вписать в равнобедренную трапецию, если ее боковая сторона равна средней линии, т.е. $AD = l$.

Таким образом,

$$AE = BE = \frac{l}{1-k} \quad \text{и} \quad CE = DE = \frac{kl}{1-k}.$$

Если же $k > 1$, то можно рассмотреть обратное отношение и воспользоваться уже полученным результатом. Тогда $AE = \frac{l}{1-k^{-1}} = \frac{kl}{k-1}$ и $DE = \frac{k^{-1}l}{1-k^{-1}} = \frac{l}{k-1}$.

51. $\frac{2ab}{a+b}$.

Решение. Пусть в заданной трапеции $ABCD$ (рис. 39) основания $AB = a$, $CD = b$, O – точка пересечения диагоналей AC и BD , отрезок EF параллелен основанию AB . Тогда в подобных треугольниках AOB и COD справедливо равенство $\frac{AO}{AB} = \frac{OC}{DC}$. Если это отношение обозначить k , то $AC = AO + OC = k(a + b)$. Кроме того,

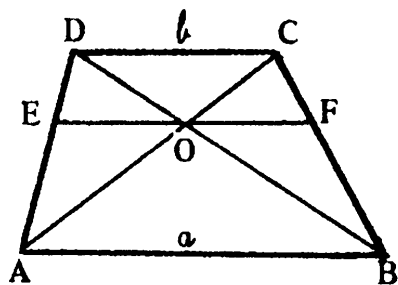


Рис. 39.

$$\frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC} = \frac{ka}{k(a+b)} = \frac{a}{a+b},$$

откуда получаем $OE = \frac{ab}{a+b}$. Аналогично $OF = \frac{ab}{a+b}$.

Таким образом, $EF = OE + OF = \frac{2ab}{a+b}$.

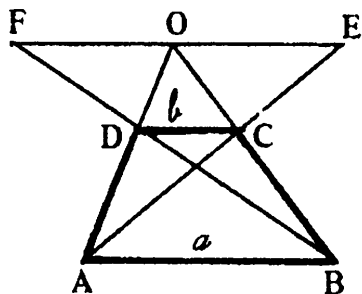


Рис. 40.

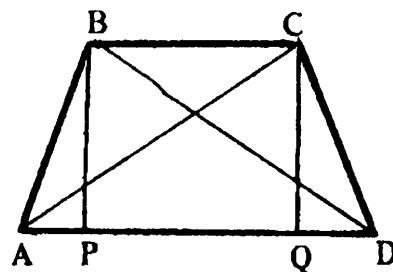


Рис. 41.

52. $\frac{2ab}{b-a}$, если $b > a$; $\frac{2ab}{a-b}$, если $b < a$.

Решение. Пусть в заданной трапеции $ABCD$ (рис. 40) основания $AB = a$, $CD = b$. Предполагаем, что $a > b$. Пусть O – точка пересечения продолженных боковых сторон трапеции, отрезок EF параллелен основанию AB и проходит через точку O . Тогда в подобных треугольниках AOB и DOC справедливо равенство $\frac{AO}{AB} = \frac{DO}{DC}$. Если это от-

ношение обозначить k , то $AO = ka$, $DO = kb$, поэтому $AD = AO - DO = k(a - b)$. Кроме того, в подобных треугольниках AOE и ADC имеем равенство $\frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AD}$, т.е. $\frac{OE}{b} = \frac{ka}{k(a-b)} = \frac{a}{a-b}$, поэтому $OE = \frac{ab}{a-b}$. Аналогично $OF = \frac{ab}{a-b}$. Следовательно, $EF = EO + OF = \frac{2ab}{a-b}$.

Если же $a < b$, то таким же способом получаем $\frac{2ab}{b-a}$.

Отметим, что при $a = b$ боковые стороны параллельны, поэтому продолжения боковых сторон не пересекаются.

53. $\frac{7a}{9}$, $\frac{17a}{18}$.

Решение. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 41) BP и CQ перпендикулярны основанию AD . Тогда $AP = QD$. Рассмотрим неизвестную величину $x = AP$. Так как диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB , треугольники ABP и ABD подобные, поэтому $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AD}$. В результате получаем, что

$$AB^2 = AD \cdot AP = ax, \quad BC = AD - 2AP = a - 2x, \\ AB + BC = \sqrt{ax} + (a - 2x) = \frac{10}{9}a, \quad \sqrt{ax} = 2x + \frac{a}{9}.$$

Из последнего соотношения после преобразований получаем квадратное уравнение

$$4x^2 - \frac{5}{9}ax + \frac{1}{81}a^2 = 0,$$

решениями которого являются $x = a/9$ и $x = a/36$. Таким образом, искомое $BC = a - 2x = \frac{7}{9}a$ или $\frac{17}{18}a$.

54. $\frac{3}{4}a$.

Решение. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 41) BP и CQ перпендикулярны основанию AD . Тогда $AP = QD$ и $PQ = BC$, поэтому $QD = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

Прямоугольные треугольники ACD и CQD имеют общий острый угол, поэтому они подобные. Следовательно, $\frac{CD}{AD} =$

$= \frac{QD}{CD}$, т.е. $CD^2 = AD \cdot QD = \frac{1}{2}AD \cdot (AD - BC)$. Кроме того, полезно отметить, что $CD = AB$.

Так как по условию $AD = a$, то для искомой величины $x = BC$ получаем

$$\begin{aligned} x^2 = BC^2 &= \frac{11}{16}a^2 - AB^2 = \frac{11}{16}a^2 - CD^2 = \\ &= \frac{11}{16}a^2 - \frac{1}{2}AD(AD - BC) = \frac{11}{16}a^2 - \frac{1}{2}a(a - x). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{a}{2}x - \frac{3}{16}a^2 = 0,$$

поэтому

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pm 1 \right) a,$$

т.е. $x = 3a/4$ или $x = -a/4$, где второе решение $x = -a/4$ постороннее.

55. $(\sqrt{3} - 1)a$.

Решение. По условию задачи в равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 41) основание $AD = a$, диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD , отношение $\frac{BC}{AB} = 2$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные на основание AD . Рассмотрим неизвестную $x = AP$. Тогда из соотношения $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AD}$ получаем, что $AB^2 = ax$, $BC = AD - 2AP = a - 2x$, $\frac{a-2x}{\sqrt{ax}} = 2$, поэтому $4x^2 - 8ax + a^2 = 0$.

Следовательно, $x = \frac{4a \pm \sqrt{12a^2}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4}a$. Здесь $x = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}a$ – посторонний корень, так как $\frac{4+2\sqrt{3}}{4}a > a$. В то же время второй корень $x = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}a$ приводит к решению задачи: искомое

$$BC = a - 2x = \left(1 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} \right) a = (\sqrt{3} - 1)a.$$

56. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}a$.

Решение. По условию задачи в равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 41) основание $AD = a$, диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD , $BC + CD = \frac{3}{4}a$. Пусть BP и CQ — перпендикуляры, опущенные на основание из вершин B и C . Ясно, что $AP = QD$.

Рассмотрим неизвестную величину $x = BC$. Тогда $QD = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{a-x}{2}$. Так как прямоугольные треугольники ACD и CQD имеют общий острый угол, они подобные, поэтому $\frac{CD}{QD} = \frac{AD}{CD}$, т.е. $CD^2 = AD \cdot QD = \frac{1}{2}a(a-x)$. Учитывая, что по условию задачи $CD = \frac{3}{4}a - x$, получаем для неизвестной x уравнение $\frac{1}{2}a(a-x) = \left(\frac{3}{4}a - x\right)^2$, откуда в результате преобразований следует уравнение $16x^2 - 16ax + a^2 = 0$.

Таким образом,

$$x = \frac{1}{16}(8 \pm \sqrt{64 - 16})a = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{3})a,$$

где решение квадратного уравнения $x = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})a$ постороннее, так как для этого решения $CD = \frac{3}{4}a - BC = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})a < 0$.

57. $p - a \pm \sqrt{a^2 - h^2}$ ($a \geq h$, $p \geq a + \sqrt{a^2 - h^2}$).

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ высота $h = BE$ опущена из вершины B на большее основание AD , а боковая сторона $AB = a$. Пусть $AD = x$, $BC = y$. Тогда по условию задачи $2p = 2a + x + y$, поэтому $\frac{1}{2}(x + y) = p - a$. Кроме того, по теореме Пифагора, примененной к треугольнику ABE , $AE^2 = AB^2 - BE^2 = a^2 - h^2$, т.е. $AE = \sqrt{a^2 - h^2}$. Наконец, отметим, что $AE = \frac{1}{2}(x - y)$.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\frac{x + y}{2} = p - a, \quad \frac{x - y}{2} = \sqrt{a^2 - h^2},$$

откуда $x = p - a + \sqrt{a^2 - h^2}$ и $y = p - a - \sqrt{a^2 - h^2}$.

58. $\sqrt{d^2 - ab}$ ($d \geq \sqrt{ab}$).

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$ ($a \geq b$), а диагональ $BD = d$. Если BE есть высота, опущенная из вершины B на основание AD , то $AE = \frac{a-b}{2}$ и $ED = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Обозначим боковую сторону $AB = x$. По теореме Пифагора, примененной к треугольнику ABE , $BE^2 = AB^2 - AE^2 = x^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Наконец, в треугольнике BED имеем соотношение $BE^2 = d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Таким образом,

$$x^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

откуда получаем, что

$$x^2 = d^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = d^2 - ab,$$

т.е. $x = \sqrt{d^2 - ab}$.

59. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Решение. Пусть в данном треугольнике ABC (рис. 42) основание $BC = a$ и h — высота, опущенная из вершины A на

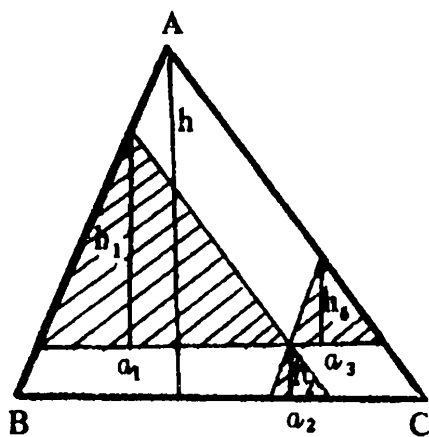


Рис. 42.

основание BC . Если a_1, a_2, a_3 и h_1, h_2, h_3 — соответствующие стороны и высоты получившихся трех треугольников, то $a_1 + a_2 + a_3 = a$ и $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Кроме того, площади подобных треугольников соотносятся как квадраты их линейных величин, т.е.

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2, \quad \frac{S_3}{S_1} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2,$$

поэтому

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}, \quad a_3 = a_1 \sqrt{\frac{S_3}{S_1}}.$$

Аналогичные соотношения справедливы для высот:

$$h_2 = h_1 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}, \quad h_3 = h_1 \sqrt{\frac{S_3}{S_1}}.$$

Следовательно, искомая площадь треугольника

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(h_1 + h_2 + h_3) = \\ &= \frac{1}{2}a_1h_1 \left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}\right) \left(1 + \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_3}{h_1}\right) = \\ &= S_1 \left(1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} + \sqrt{\frac{S_3}{S_1}}\right)^2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2. \end{aligned}$$

60. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$, h – высота трапеции, точка O – точка пересечения диагоналей AC и BD . Если h_1 и h_2 – высоты треугольников AOD и BOC , то $h = h_1 + h_2$. Кроме того, треугольники AOD и BOC подобные, поэтому

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}.$$

Следовательно,

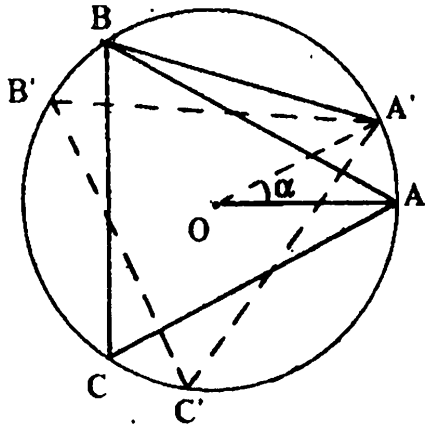
$$h_2 = h_1 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}, \quad b = a \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}.$$

В результате получаем, что искомая площадь трапеции

$$\begin{aligned} S &= \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2) = \\ &= \frac{1}{2}ah_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) = S_1 \left(1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)^2 = \\ &= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \end{aligned}$$

61. $\{\alpha + \frac{2\pi}{3}k : k = 0, 1, 2\} \cup \{\frac{2\pi}{3}k - \alpha : k = 1, 2, 3\}$, где $\alpha = \frac{\pi}{3} - 2 \arccos \frac{l}{2\sqrt{3}a}$ ($3a \leq l \leq 2\sqrt{3}a$).

Решение. Пусть α – величина угла поворота. Считаем, что $0 < \alpha \leq \pi/2$. Пусть O – центр описанной окружности (рис. 43), R – ее радиус.



Ясно, что $l = 3(AA' + A'B)$. В то же время $AA' = 2R \sin(\alpha/2)$, $A'B = 2R \sin(\pi/3 - \alpha/2)$. Следовательно,

$$l = 6R \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) =$$

Рис. 43.

$$= 12R \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3}a \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right),$$

поэтому

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{l}{2\sqrt{3}a}.$$

Отметим крайние случаи: если $\alpha = \pi/3$, то $l = 2\sqrt{3}a$, если же $\alpha = 0$, то $l = 3a$. Очевидно, что $3a \leq l \leq 2\sqrt{3}a$. Наконец, если $0 \leq \alpha \leq \pi/3$, то $-\pi/6 \leq \alpha/2 - \pi/6 \leq 0$, поэтому $\alpha/2 - \pi/6 = -\arccos \frac{l}{2\sqrt{3}a}$, т.е. $\alpha = \pi/3 - 2 \arccos \frac{l}{2\sqrt{3}a}$.

62. Искомое отношение $k = \frac{p \pm \sqrt{2p-1}}{1-p}$, если $1/2 < p < 1$; $k = 1$, если $p = 1/2$; $k = 0$, если $p = 1$.

Решение. Если $A'B'C'D'$ есть квадрат, вписанный в данный квадрат $ABCD$ (рис. 44), то $AA' = BB' = CC' = DD'$. Пусть сторона данного квадрата $AB = a$ и отрезок $AA' = x$. Тогда $A'B = a - x$, поэтому $A'B'^2 = A'B^2 + BB'^2 = (a - x)^2 + x^2 = a^2 + 2x^2 - 2ax$. Следовательно, из условия задачи получаем уравнение

$$\frac{a^2 + 2x^2 - 2ax}{a^2} = p,$$

т.е. $2x^2 - 2ax + (1-p)a^2 = 0$. Это уравнение имеет решения $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 2(1-p)a^2}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2p-1})a$, поэтому $a-x = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{2p-1})a$. Следовательно, искомое отношение

$$\frac{x}{a-x} = \frac{1 \pm \sqrt{2p-1}}{1 \mp \sqrt{2p-1}} = \frac{(1 \pm \sqrt{2p-1})^2}{1 - (2p-1)} = \frac{p \pm \sqrt{2p-1}}{1-p}.$$

Отметим, что при $p = 1/2$ имеется одно решение $k = 1$, а в случае, когда $p = 1$, вписанный квадрат совпадает с исходным квадратом, т.е. $k = 0$.

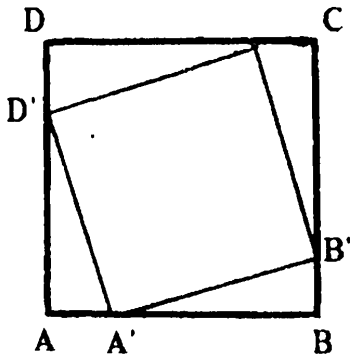


Рис. 44.

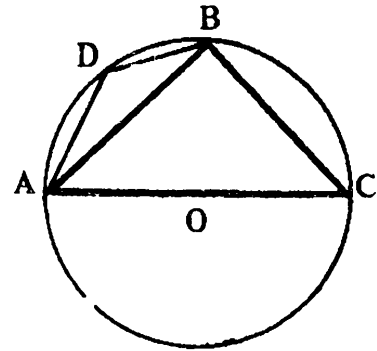


Рис. 45.

63. Точка находится на расстоянии $\sqrt{\frac{2}{k^2 + \sqrt{2}k + 1}} R$ или $k\sqrt{\frac{2}{k^2 + \sqrt{2}k + 1}} R$ от одной из вершин треугольника.

Решение. Положение искомой точки D определяется, например, расстоянием до вершины A треугольника ABC (рис. 45). Отметим, что AC — диаметр, поэтому треугольник ABC прямоугольный, $AB = \sqrt{2} R$, а угол между DA и DB равен 135° . Пусть $\frac{DB}{DA} = k$, $x = DA$. Тогда $DB = kx$, а по теореме косинусов, примененной к треугольнику ADB , получаем $AB^2 = DB^2 + DA^2 - 2DB \cdot DA \cos 135^\circ$, т.е. $2R^2 = k^2x^2 + x^2 + \sqrt{2}kx^2$, откуда

$$x^2 = \frac{2R^2}{k^2 + \sqrt{2}k + 1} \quad \text{и} \quad x = \sqrt{\frac{2}{k^2 + \sqrt{2}k + 1}} R$$

для любого $k \geq 0$.

Полезно отметить, что при $k = 0$ расстояние $x = \sqrt{2} R$ и точка D совпадает с точкой B . Наконец, если $\frac{DA}{DB} = k$, то

$$DA = k \sqrt{\frac{2}{k^2 + \sqrt{2}k + 1}} R \quad (k \geq 0),$$

и при $k = 0$ точка D совпадает с точкой A .

64. Точка находится на расстоянии $\frac{1}{2}(L \pm \sqrt{12R^2 - 3L^2})$ от одной из двух ближайших вершин треугольника ($\sqrt{3}R \leq L \leq 2R$).

Решение. Положение искомой точки D можно определить через расстояние от этой точки до вершины A треуголь-

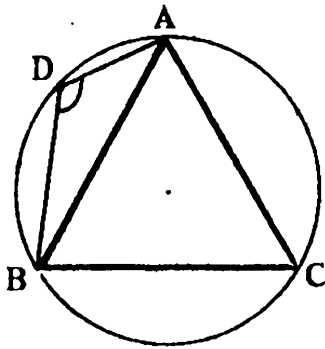


Рис. 46.

ника ABC (рис. 46). Отметим, что сторона $AB = \sqrt{3}R$. Рассмотрим треугольник ADB . По условию задачи $AD + DB = L$, а угол ADB равен $2\pi/3$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \frac{2\pi}{3}$, т.е. $3R^2 = AD^2 + BD^2 + AD \cdot BD$.

Следовательно, $AD \cdot BD = L^2 - 3R^2$, поэтому имеем систему уравнений для определения сторон AD и BD :

$$\begin{cases} AD \cdot BD = L^2 - 3R^2, \\ AD + BD = L. \end{cases}$$

Из системы получаем, что искомая величина $x = AD$ является решением квадратного уравнения $x^2 - Lx + (L^2 - 3R^2) = 0$.

Таким образом,

$$x = \frac{1}{2}(L \pm \sqrt{L^2 - 4(L^2 - 3R^2)}) = \frac{1}{2}(L \pm \sqrt{12R^2 - 3L^2})$$

$$(\sqrt{3}R \leq L \leq 2R).$$

65. $2R \cos \alpha$.

Решение. Пусть P — данная точка (рис. 47). Найдем сумму расстояний $CP + PB$. Для этого отложим на AP отрезок $AM = CP$. Тогда $AM = CP$, $AB = CB$ и $\angle BAP = \angle BCP$, поэтому треугольники ABM и BCP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $MB = PB$. В то же время $\angle APB = \angle ACB = \pi/3$, поэтому равнобедренный треугольник $BM P$ является равносторонним.

Таким образом, $PB = PM$ и $CP + PB = AM + MP = AP = 2R \cos \alpha$.

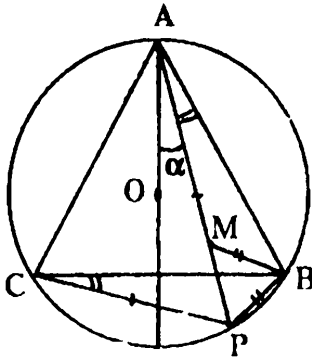


Рис. 47.

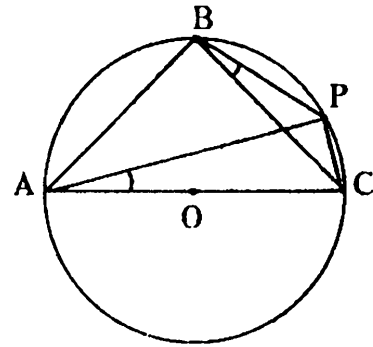


Рис. 48.

66. $\frac{k}{\sqrt{2k+1}}, \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (или $\frac{1}{\sqrt{2+k}}, \frac{k}{\sqrt{2+k}}$).

Решение. Если ABC — данный треугольник, вписанный в окружность радиусом R , то его катеты $AB = BC = \sqrt{2} R$ (рис. 48). Кроме того, для точки P , лежащей на дуге BC , $\frac{BP}{PC} = k$ по условию.

Ясно, что $\angle PBC = \angle PAC$. Обозначим этот угол α . Тогда по теореме косинусов, примененной к треугольнику PBC , получаем соотношение $PC^2 = BP^2 + BC^2 - 2BP \cdot BC \cos \alpha$.

Так как $BP = k \cdot PC$, $2R \cos \alpha = AP$, $BC = \sqrt{2} R$ и $4R^2 = PC^2 + AP^2$, это соотношение можно записать в виде

$$2PC^2 = 2k^2 PC^2 + (PC^2 + AP^2) - 2\sqrt{2} k PC \cdot AP.$$

Тогда после деления на AP^2 для искомого отношения $x = \frac{PC}{AP}$ получаем уравнение $2x^2 = 2k^2 x^2 + x^2 + 1 - 2\sqrt{2} kx$, т.е. $(1 - 2k^2)x^2 + 2\sqrt{2} kx - 1 = 0$.

Следовательно,

$$x = \frac{-\sqrt{2}k \pm \sqrt{2k^2 + (1 - 2k^2)}}{1 - 2k^2} = \frac{-\sqrt{2}k \pm 1}{1 - 2k^2}.$$

Здесь решение

$$x = -\frac{1 + \sqrt{2}k}{1 - 2k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}k - 1}$$

является посторонним. Действительно, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{PC}{AP} = x = \frac{1}{\sqrt{2}k - 1}$, то $(\sqrt{2}k - 1) \sin \alpha = \cos \alpha$, $k \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha + \sin \alpha) = \sin(\pi/4 + \alpha)$. В то же время по теореме синусов, примененной к треугольнику BPC , получаем $k \sin \alpha = \sin(\pi/4 - \alpha)$, так как угол PCB равен $\pi/4 - \alpha$. Следовательно, $\sin(\pi/4 + \alpha) = \sin(\pi/4 - \alpha)$, т.е. $\alpha = 0$.

В результате получаем

$$\frac{PC}{AK} = x = \frac{-\sqrt{2}k + 1}{1 - 2k^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}k},$$

поэтому $\frac{BP}{AP} = \frac{k}{1 + \sqrt{2}k}$.

Если же $\frac{PC}{BP} = k$, то можно рассмотреть обратное отношение $k_1 = 1/k$. Тогда

$$x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}k_1} = \frac{k}{k + \sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{BP}{AP} = \frac{1}{k + \sqrt{2}}.$$

Замечание. Использование теоремы синусов дает другое, более простое, решение задачи. В самом деле, по теореме синусов, примененной к треугольнику PCB , имеем равенство $k \sin \alpha = \sin(\pi/4 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha - \sin \alpha)$, т.е. $(\sqrt{2}k + 1) \sin \alpha = \cos \alpha$, поэтому $x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}k + 1}$, и тогда не возникает постороннее решение.

67. $3r$.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры данных кругов, O – центр четвертого круга с искомым радиусом R (рис. 49). Тогда $O_2O_3 = 3r$, $O_1O_2 = O_1O_3 = \frac{5}{2}r$. Высота O_1A треугольника $O_1O_2O_3$ имеет длину, равную

$$\sqrt{\frac{25}{4}r^2 - \frac{9}{4}r^2} = 2r.$$

Кроме того, $OO_2 = R - \frac{3}{2}r$,
 $OO_1 = R - r$ и

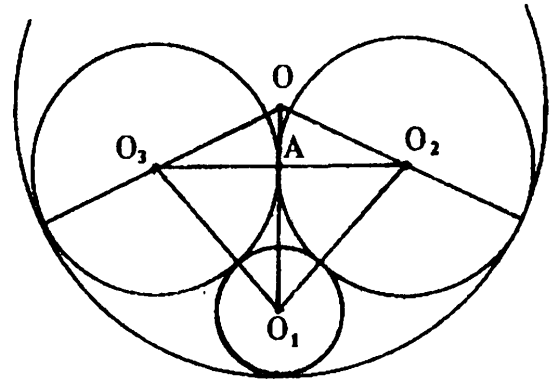


Рис. 49.

$$OA = |AO_1 - OO_1| = |2r - (R - r)| = |3r - R|.$$

По теореме Пифагора для треугольника AOO_2 получаем, что $OO_2^2 = OA^2 + AO_2^2$, поэтому

$$\left(R - \frac{3}{2}r\right)^2 = (3r - R)^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2,$$

$$R^2 - 3rR + \frac{9}{4}r^2 = 9r^2 - 6rR + R^2 + \frac{9}{4}r^2, \quad 9r^2 = 3rR \text{ и } R = 3r.$$

Отметим, что $OO_1 = R - r = 3r - r = 2r = O_1A$, т.е. центр описанного круга совпадает с серединой отрезка O_2O_3 .

68. $\frac{R}{3}$.

Решение. Соединив центры трех данных кругов, получим равнобедренный треугольник ABC , в котором боковая сторона $AB = AC = 5R$, а основание $BC = 8R$. Если r – радиус четвертого круга, то его центр O находится на высоте треугольника, проведенной из вершины A , на расстоянии $OA = r + R$. Кроме того, $OC = OB = r + 4R$.

Если $h = AD$ – высота треугольника, то

$$h = \sqrt{25R^2 - 16R^2} = 3R,$$

поэтому $OD = AD - AO = 3R - (r + R) = 2R - r$. Тогда по теореме Пифагора, примененной к треугольнику BOD , получаем $OD^2 + DB^2 = OB^2$, т.е. $(2R - r)^2 + 16R^2 = (r + 4R)^2$, откуда $4R^2 - 4rR + r^2 + 16R^2 = r^2 + 8rR + 16R^2$, $4R^2 = 12rR$, $R = 3r$.

Таким образом, искомый радиус $r = R/3$.

69. $\frac{3R}{8}$.

Решение. Пусть $x = O_1A = O_1B$ (рис. 50). По теореме Пифагора для треугольника OO_1B получаем соотношение $OO_1^2 = O_1B^2 + OB^2$, т.е. $(R - x)^2 = x^2 + R^2/4$. Следовательно,

$$R^2 - 2Rx + x^2 = x^2 + \frac{R^2}{4},$$

$$2Rx = \frac{3}{4}R^2 \text{ и } x = \frac{3}{8}R.$$

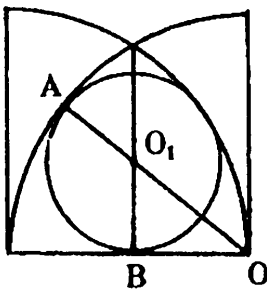


Рис. 50.

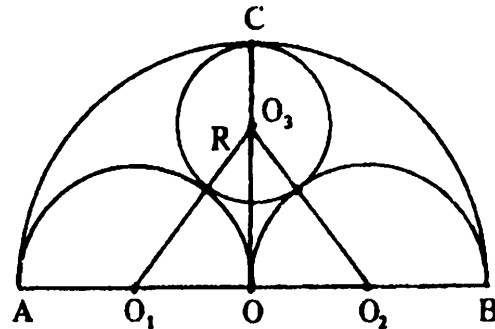


Рис. 51.

70. $6R$.

Решение. Если $AB = x$, то $OA = OB = OC = x/2$ и $OO_1 = OO_2 = x/4$. Кроме того, $O_1O_3 = O_2O_3 = x/4 + R$. Отметим также, что в треугольнике $O_1O_2O_3$ высота $O_3O = CO - CO_3 = x/2 - R$ (рис. 51). Следовательно, равенство $O_1O_3^2 = OO_1^2 + OO_3^2$ приводит к уравнению

$$\left(\frac{x}{4} + R\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - R\right)^2,$$

т.е.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2}xR + R^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4} - xR + R^2,$$

откуда получаем $\frac{x^2}{4} = \frac{3}{2}xR$. Таким образом, $x = 6R$.

71. $(2\sqrt{3} + 3)R$.

Решение. Центр круга искомого радиуса x является точкой пересечения медиан равностороннего треугольника, вершины которого совпадают с центрами трех данных кругов, поэтому

$$R + x = \frac{2}{3} \cdot 2x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}x,$$

т.е. $R = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)x$. Следовательно, $x = \frac{\sqrt{3}R}{2-\sqrt{3}} = (2\sqrt{3} + 3)R$.

72. $(2\sqrt{3} - 3)R$.

Решение. Если x — радиус каждого из трех кругов, то треугольник, вершинами которого являются центры этих кругов, есть равносторонний треугольник со стороной $2x$. Центр данного круга радиусом R совпадает с точкой пересечения высот треугольника. Так как высота треугольника равна $\frac{2}{\sqrt{3}}x$, то $R = \frac{2x}{\sqrt{3}} + x = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x$. Следовательно,

$$x = \frac{\sqrt{3}R}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3})R = (2\sqrt{3} - 3)R.$$

73. $\frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - a^2})$, $\frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - a^2})$ ($b \geq a$).

Решение. Пусть $AB = a$, $CD = b$, $DE = x$, $CE = y$ (рис. 52). Тогда $AE = EB$ и $AE \cdot EB = DE \cdot EC$, поэтому $xy = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $x + y = b$.

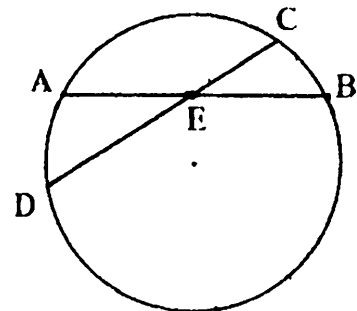


Рис. 52.

Следовательно, x и y являются решениями квадратного уравнения $z^2 - bz + a^2/4 = 0$.

Считая, что $x \geq y$, получаем $x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - a^2})$, $y = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - a^2})$.

$$74. \frac{5}{\sqrt{6}}\sqrt{R^2 - d^2} \quad (R > d).$$

Решение. Пусть E — данная точка и AB — хорда, проходящая через точку E и делящаяся этой точкой в отношении $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$. Следовательно, если $x = AB$, то $AE = \frac{2}{5}x$ и $EB = \frac{3}{5}x$.

Далее, пусть O — центр окружности и CD — продолжение отрезка EO до пересечения с окружностью. Тогда из условия $EO = d$ вытекает, что $CE = R - d$ и $ED = R + d$.

Таким образом, из соотношения $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ получаем $\frac{6}{25}x^2 = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$, откуда $x = \frac{5}{\sqrt{6}}\sqrt{R^2 - d^2}$.

$$75. \frac{l(R+r)}{4\sqrt{Rr}}.$$

Решение. Пусть x — искомый радиус. Рассмотрим два возможных случая касания двух данных окружностей третьей — внешним (рис. 53, а) и внутренним образом (рис. 53, б).

В первом случае по теореме косинусов имеем

$$(R + x)^2 = (r + x)^2 + (R + r)^2 - 2(r + x)(R + r) \cos \alpha,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(r + x)^2 + (R + r)^2 - (R + x)^2}{2(r + x)(R + r)} = \\ &= \frac{r^2 + rx + Rr - Rx}{(r + x)(R + r)}. \end{aligned}$$

В то же время расстояние от центра третьей окружности до касательной.

$$h = r - (r + x) \cos \alpha = r - \frac{r^2 + rx + Rr - Rx}{R + r} = x \frac{R - r}{R + r},$$

где предполагается, что $R \geq r$.

Таким образом,

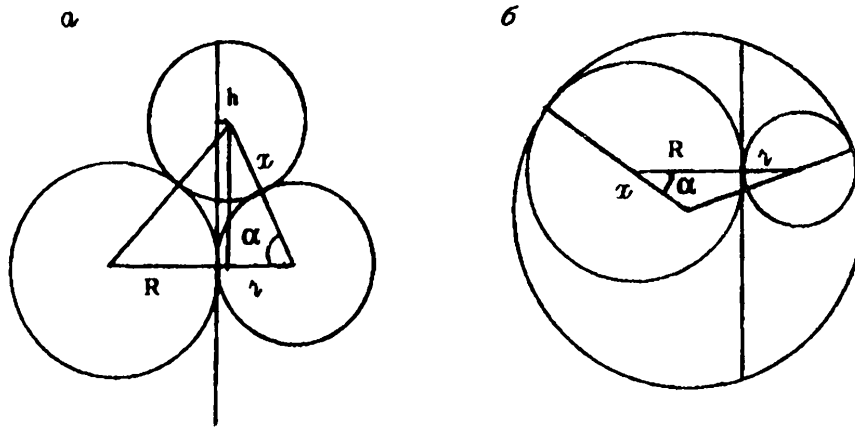


Рис. 53.

$$l = 2\sqrt{x^2 - h^2} = 2x\sqrt{1 - \left(\frac{R - r}{R + r}\right)^2} = \frac{4x\sqrt{Rr}}{R + r},$$

т.е. $x = \frac{l(R+r)}{4\sqrt{Rr}}.$

Во втором случае по теореме косинусов имеем

$$(x - r)^2 = (x - R)^2 + (r + R)^2 - 2(x - R)(r + R) \cos \alpha,$$

поэтому

$$\cos \alpha = \frac{R^2 - xR + rR + xr}{(x - R)(r + R)} \quad \text{и} \quad h = R - (x - R) \cos \alpha.$$

Следовательно, $l = 2\sqrt{x^2 - h^2} = 4x \frac{\sqrt{Rr}}{R+r}$ и $x = \frac{l(R+r)}{4\sqrt{Rr}}.$

Отметим, что в первом случае решение существует при любом $l > 0$, а во втором — только при $l \geq 4\sqrt{Rr}.$

76. $\frac{rR}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$ (второе решение – со знаком минус в знаменателе только при $R \neq r$).

Решение. Возможны два случая (рис. 54, а и б). В обоих случаях x обозначает радиус искомой окружности.

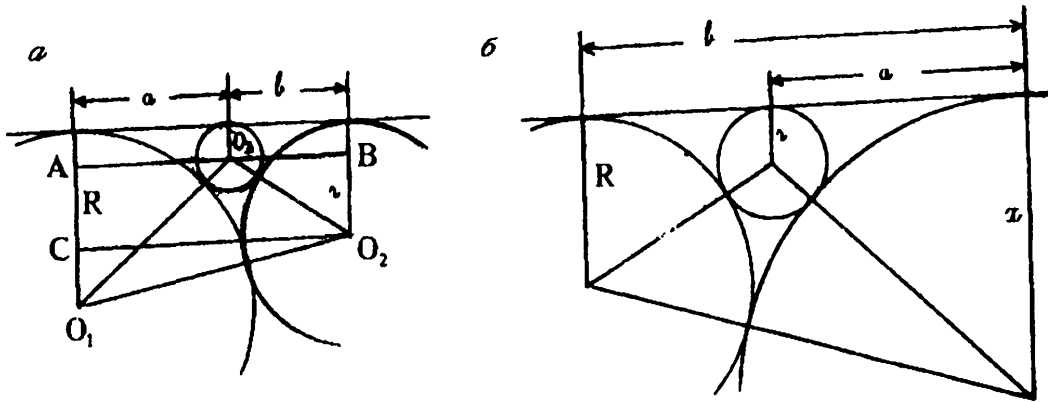


Рис. 54.

Пусть в первом случае AB параллельно общей касательной, $AO_3 = a$, $BO_3 = b$. Тогда в треугольниках AO_1O_3 и BO_2O_3 имеем

$$a = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx},$$

$$b = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}.$$

Пусть O_2C перпендикулярно O_1A . Тогда в прямоугольном треугольнике O_1O_2C катет

$$CO_2 = a + b = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Следовательно, $\sqrt{Rx} + \sqrt{rx} = \sqrt{Rr}$, поэтому $x = \frac{rR}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$.

Во втором случае a и b определяются аналогично:

$$a = \sqrt{(r+x)^2 - (x-r)^2} = 2\sqrt{rx},$$

$$b = \sqrt{(R+x)^2 - (x-R)^2} = 2\sqrt{Rx}.$$

Кроме того, имеем соотношение

$$b - a = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Таким образом, $\sqrt{Rx} - \sqrt{rx} = \sqrt{Rr}$, поэтому $x = \frac{rR}{(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}$.

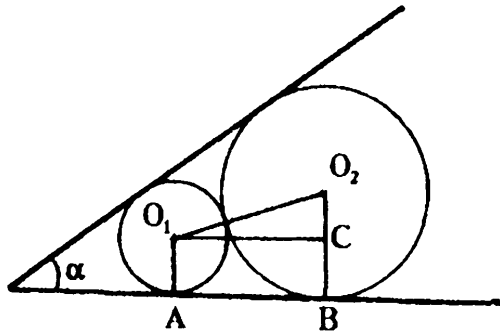


Рис. 55.

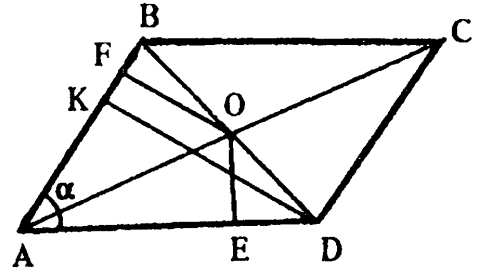


Рис. 56.

77. $\frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$

Решение. Пусть O_1, O_2 — центры данных кругов, а A, B — точки касания одной из сторон угла (рис. 55). Если $r = O_1A$, $R = O_2B$ и O_1C параллельно AB , то $O_1O_2 = r + R$, $O_2C = R - r$, $\angle O_2O_1C = \alpha/2$. В треугольнике O_1O_2C имеем $O_2C = O_1O_2 \sin \frac{\alpha}{2}$, т.е. $R - r = (R + r) \sin \frac{\alpha}{2}$. В результате получаем

$$r \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = R \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

поэтому искомое отношение $\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$

78. $\frac{4mp}{\sin \alpha}.$

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 56) угол при вершине A равен α , O — точка пересечения диагоналей. Из точек O и D проведем перпендикуляры OF и DK к стороне AB . Кроме того, пусть OE перпендикулярно стороне AD . Так как точкой O диагональ BD делится пополам, в треугольнике BKD отрезок OF является средней линией этого треугольника, поэтому $DK = 2OF = 2m$. Отсюда следует, что $AD = \frac{DK}{\sin \alpha} = \frac{2m}{\sin \alpha}.$

В результате получаем, что искомая площадь данного параллелограмма

$$S = AD \cdot 2p = \frac{4mp}{\sin \alpha}.$$

79. $\operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}.$

Решение. Так как AD — медиана, $BD = DC$, т.е. $BD = \frac{1}{2}AB$. Если x есть угол BAD , то $\angle BDA = \pi - \alpha - x$. Следовательно, по теореме синусов, примененной к треугольнику ABD , имеем соотношение

$$\frac{BD}{\sin x} = \frac{AB}{\sin(\pi - \alpha - x)} = \frac{AB}{\sin(\alpha + x)}.$$

В результате получаем, что $\sin(\alpha + x) = 2 \sin x$, откуда $\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x = 2 \sin x$, $(2 - \cos \alpha) \sin x = \sin \alpha \cos x$ т.е.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha} \quad \text{и} \quad x = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}.$$

80. $2 \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} r.$

Решение. Из условий задачи имеем $\angle CAE = \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\angle ECB = \pi/2 - \alpha/2$, $\angle ABE = \pi - \alpha/2$, $\angle AEB = \angle DEB = \beta/2$ (рис. 57). Тогда по теореме синусов, примененной к треугольнику ABE , получаем, что

$$\frac{AB}{\sin(\beta/2)} = \frac{BE}{\sin(\alpha - \beta)/2},$$

т.е.

$$\frac{AB}{\sin(\beta/2)} = \frac{2r \cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha - \beta)/2}.$$

Таким образом, искомая величина

$$AB = 2 \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} r.$$

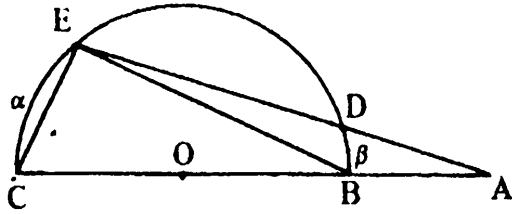


Рис. 57.

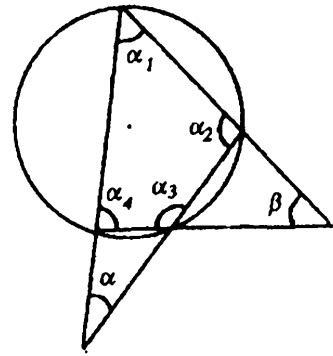


Рис. 58.

$$81. \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta), \frac{1}{2}(\pi + \beta - \alpha), \frac{1}{2}(\pi - \beta + \alpha).$$

Решение. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — углы данного четырехугольника (рис. 58). Тогда $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$, $\alpha_4 + \alpha_2 = \pi$, $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$, $\beta + \alpha_1 + \alpha_4 = \pi$, $\beta + \pi = \alpha_2 + \alpha_3$. Из первого и третьего равенств получаем $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2$, т.е. $\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha$. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha, \\ \alpha_3 + \alpha_2 = \beta + \pi. \end{cases}$$

Из этой системы находим $\alpha_2 = \frac{\pi + \beta - \alpha}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\pi + \alpha + \beta}{2}$. Но тогда

$$\alpha_1 = \pi - \alpha_3 = \pi - \frac{\pi + \alpha + \beta}{2} = \frac{\pi - \alpha - \beta}{2},$$

$$\alpha_4 = \pi - \alpha_2 = \pi - \frac{\pi + \beta - \alpha}{2} = \frac{\pi - \beta + \alpha}{2}.$$

$$82. \frac{1}{4}(p^2 - q^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Решение. Если в параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = p$, $BD = q$ и стороны $AD = BC = a$, $AB = CD = b$, то по закону параллелограмма $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$, поэтому $p^2 + q^2 = 2(a^2 + b^2)$.

В то же время по теореме косинусов, примененной к треугольнику ABD , имеем $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = q^2$, поэтому

$$2ab \cos \alpha = a^2 + b^2 - q^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - q^2 = \frac{1}{2}(p^2 - q^2),$$

откуда $ab = \frac{p^2 - q^2}{4 \cos \alpha}$. Следовательно, искомая площадь равна $ab \sin \alpha = \frac{1}{4}(p^2 - q^2) \operatorname{tg} \alpha$.

83. $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} - 1)r$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + 1)r$.

Решение. Пусть $AB = x$ (рис. 59). По условию задачи $AO = 2r$ и $OD = r/2$, причем отрезок OD перпендику-

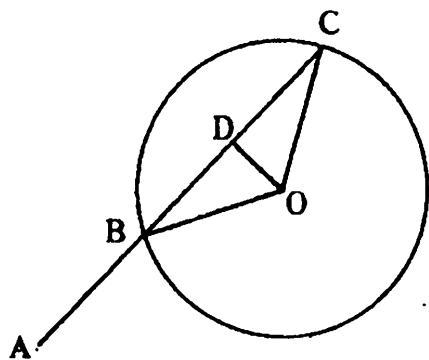


Рис. 59.

лярен хорде BC . Тогда $OB = OC = r$ и $BC = 2BD = 2\sqrt{r^2 - r^2/4} = \sqrt{3}r$. Следовательно, $4r^2 = AD^2 + OD^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + \frac{r^2}{4}$, откуда легко найти x : $x = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} - 1)r$. Наконец, вторая искомая величина

$$AC = AB + BC = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} - 1)r + \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + 1)r.$$

84. $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r$.

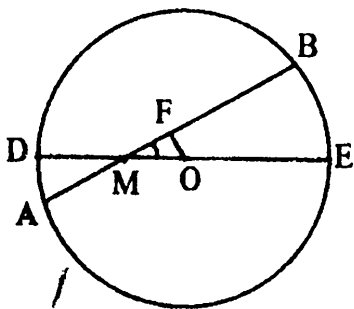


Рис. 60.

Решение. По условию задачи $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$ и $\angle BME = \frac{\pi}{6}$, где DE — диаметр (рис. 60). Пусть $x = AB$. Тогда $AM = x/3$ и $MB = 2x/3$. Кроме того, если F — середина отрезка AB , то $MF = AF - AM = x/2 - x/3 = x/6$, поэтому

$$MO = \frac{MF}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot MF = \frac{x}{3\sqrt{3}}.$$

Теперь воспользуемся равенством

$$AM \cdot MB = DM \cdot ME,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{2}{9}x^2 = \left(r - \frac{x}{3\sqrt{3}}\right) \left(r + \frac{x}{3\sqrt{3}}\right) = r^2 - \frac{x^2}{27},$$

т.е. $\frac{7}{27}x^2 = r^2$, поэтому $x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r$.

85. Искомое множество изображено на рис. 61. Его площадь равна 2π .

Решение. Неравенство $|x + y| \geq 2$ можно записать в виде $x + y \geq 2$ или $x + y \leq -2$, т.е. $y \geq 2 - x$ или $y \leq -2 - x$. Тогда множество точек $M(x, y)$, для которых $|x + y| \geq 2$, есть плоскость без внутренних точек полосы, ограниченной прямыми $y = 2 - x$ и $y = -2 - x$. Второе неравенство запишем в виде

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) \leq 2.$$

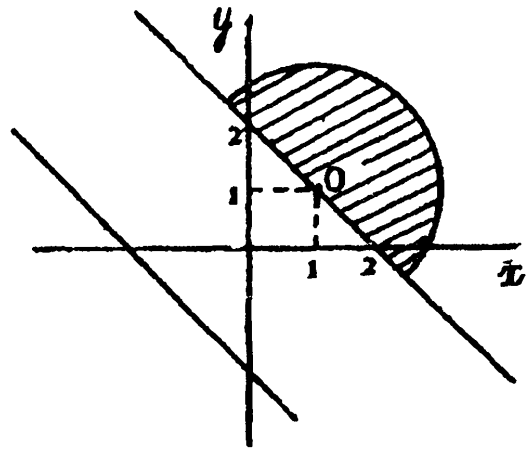


Рис. 61.

Выделяя слева полные квадраты, получаем $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$. Следовательно, множество точек $M(x, y)$, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \leq 2(x + y + 1)$, есть круг с центром в точке $O(1, 1)$ радиусом $R = 2$. Так как центр лежит на прямой $y = 2 - x$, а радиус меньше ширины полосы, равной $2\sqrt{2}$, общая часть есть полукруг, изображенный на рис. 61. Его площадь $\frac{\pi R^2}{2} = 2\pi$.

86. Искомое множество изображено на рис. 62. Его площадь равна $\frac{9\pi}{2}$.

Решение. Неравенство $|x - y| \leq 3$ можно записать в виде $x - y \leq 3$ или $x - y \geq -3$, т.е. $y \geq x - 3$ или $y \leq x + 3$.

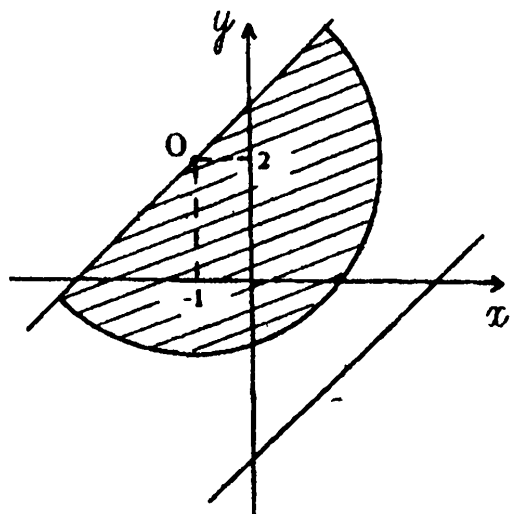


Рис. 62.

Тогда множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - y| \leq 3$, есть полоса, ограниченная прямыми $y = x - 3$ и $y = x + 3$ (включая эти прямые). Второе неравенство запишем в виде

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) \leq 4$$

и выделим слева полные квадраты

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$$

Следовательно, множество точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, есть круг с центром в точке $O(-1, 2)$ радиусом $R = 3$.

Так как центр круга лежит на прямой $y = x + 3$, а радиус меньше ширины полосы, равной $3\sqrt{2}$, общая часть есть полукруг, изображенный на рис. 62. Его площадь равна $\frac{9\pi}{2}$.

87. Искомое множество изображено на рис. 63.

Решение. Неравенство можно записать в виде $-1 \leq 2x - y \leq 1$, поэтому $y \leq 2x + 1$ и $y \geq 2x - 1$. Следовательно, искомое множество точек есть полоса — часть плоскости, ограниченная прямыми $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$.

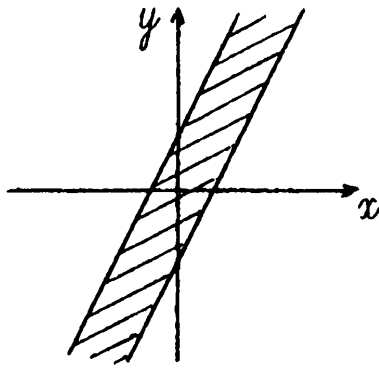


Рис. 63.

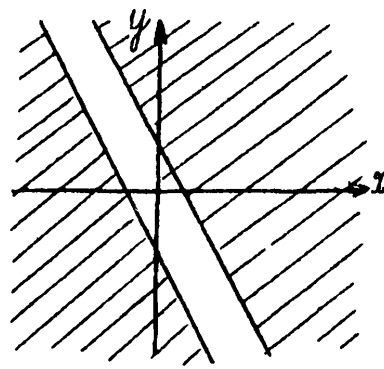


Рис. 64.

88. Искомое множество изображено на рис. 64.

Решение. Неравенство $|2x + y| \geq 1$ можно записать в виде $2x + y \geq 1$ или $2x + y \leq -1$, т.е. $y \geq 1 - 2x$ или $y \leq -2x - 1$. Следовательно, искомое множество есть объединение части плоскости, расположенной ниже прямой $y = -2x - 1$ (включая эту прямую), и части плоскости, расположенной выше прямой $y = 1 - 2x$ (включая прямую).

89. Геометрическое место точек изображено на рис. 65.

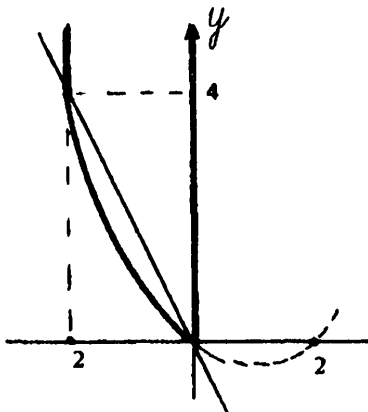


Рис. 65

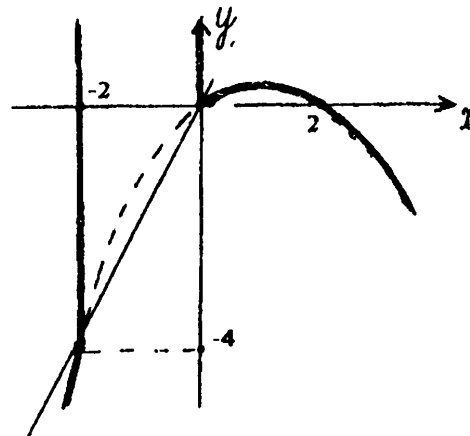


Рис. 66.

Решение. Если $y + 2x \geq 0$, то $|y + 2x| = y + 2x$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $y - x^2 = y + 2x$. Следовательно, $x^2 + 2x = 0$, откуда находим $x = 0$ или $x = -2$.

Если $y + 2x < 0$, то $|y + 2x| = -y - 2x$, поэтому получаем уравнение $y - x^2 = -y - 2x$, т.е. $y = \frac{1}{2}x^2 - x$. Таким образом, разбив плоскость прямой $y = -2x$, мы должны взять часть вертикальных прямых $x = 0$ и $x = -2$, расположенную выше

прямой $y = -2x$, а также взять часть параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ ниже этой прямой. В результате имеем геометрическое место точек, изображенное на рис. 65.

90. Геометрическое место точек изображено на рис. 66.

Решение. Если $y - 2x \geq 0$, то $|y - 2x| = y - 2x$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $y + x^2 = y - 2x$. Следовательно, $x^2 + 2x = 0$, откуда находим $x = 0$ или $x = -2$.

Если $y - 2x < 0$, то $|y - 2x| = 2x - y$, поэтому получаем уравнение $y + x^2 = 2x - y$, т.е. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

Таким образом, разбив плоскость прямой $y = 2x$, мы должны взять часть вертикальных прямых $x = 0$ и $x = -2$, расположенную выше прямой $y = 2x$, а также часть параболы $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$, расположенную ниже этой прямой. В результате имеем геометрическое место точек, изображенное на рис. 66.

91. Геометрическое место точек изображено на рис. 67.

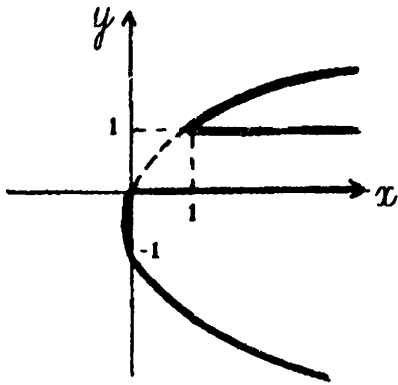


Рис. 67.

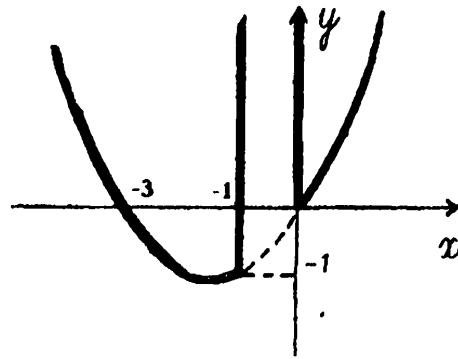


Рис. 68.

Решение. Если $x - y^2 \geq 0$, то $|x - y^2| = x - y^2$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $x = (x - y^2) + y$. Следовательно, $-y^2 + y = 0$, т.е. $y = 1$ или $y = 0$.

Если $x - y^2 < 0$, то $|x - y^2| = y^2 - x$, поэтому получаем уравнение $x = y^2 - x + y$, т.е. $x = \frac{1}{2}(y^2 + y)$. Таким образом, разбив плоскость параболой $x = y^2$ на две части, мы должны взять часть горизонтальных прямых $y = 0$

и $y = 1$, лежащую во внутренности параболы (правее параболы), а также взять часть параболы $x = \frac{1}{2}(y^2 + y)$, лежащую вне параболы $x = y^2$.

В результате имеем геометрическое место точек, изображенное на рис. 67.

92. Геометрическое место точек изображено на рис. 68.

Решение. Если $y - x^2 - 2x \geq 0$, то

$$|y - x^2 - 2x| = y - x^2 - 2x,$$

поэтому данное уравнение можно записать в виде

$$y = y - x^2 - 2x + x,$$

т.е. $x^2 + x = 0$. Следовательно, $x = 0$ или $x = -1$.

Если $y - x^2 - 2x < 0$, то

$$|y - x^2 - 2x| = x^2 + 2x - y,$$

поэтому получаем $y = x^2 + 2x - y + x$, откуда

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

Отметим, что уравнение $y = x^2 + 2x$ задает параболу с вершиной в точке $(-1, -1)$. Искомое геометрическое место точек состоит из части вертикальных прямых $x = 0$ и $x = -1$, расположенной выше этой параболы, а также части параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$, расположенной ниже параболы $y = x^2 + 2x$.

93. Искомое множество изображено на рис. 69.

Решение. Если $3 - x \geq 0$, то $|3 - x| = 3 - x$, поэтому данное неравенство можно записать в виде $3 - x \geq y^2 - 1$. Следовательно, $x \leq 4 - y^2$.

Если $3 - x < 0$, то $|3 - x| = x - 3$, поэтому получаем неравенство $x - 3 \geq y^2 - 1$, т.е. $x \geq y^2 + 2$.

Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из части плоскости, ограниченной параболой $x = 4 - y^2$ и лежащей в полуплоскости $x \leq 3$, а также части плоскости, ограниченной параболой $x = y^2 + 2$ и лежащей в полуплоскости $x > 3$.

В результате получаем геометрическое место точек, изображенное на рис. 69.

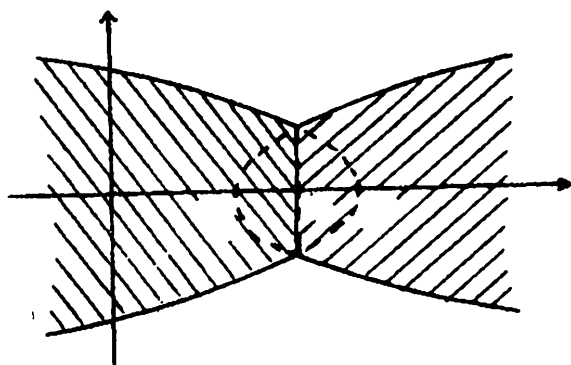


Рис. 69.

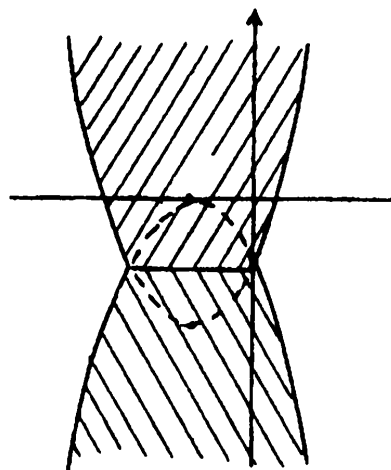


Рис. 70.

94. Искомое множество изображено на рис. 70.

Решение. Если $y + 1 \geq 0$, т.е. $y \geq -1$, то $|y + 1| = y + 1$, поэтому данное неравенство можно записать в виде $y \geq (x + 1)^2 - 2$. Если же $y < -1$, то имеем неравенство $-y - 1 \geq x^2 + 2x$, т.е. $y \leq -(x + 1)^2$.

Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из части плоскости, ограниченной параболой $y = (x + 1)^2 - 2$ и лежащей в полуплоскости $y \geq -1$, а также части плоскости, ограниченной параболой $y = -(x + 1)^2$ и лежащей в полуплоскости $y < -1$.

В результате получаем множество, изображенное на рис. 70.

1. $\sqrt{3} a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Проведя через данную точку O плоскость, перпендикулярную SO (рис. 71), получим правильную треугольную пирамиду $SABC$, угол BSC которой равен α . Если SD – высота треугольника BSC , то $BD = CD$, т.е. $BC = 2CD$. Пусть OE перпендикулярно SD . Тогда по условию задачи $OE = a$, а из подобия треугольников OSE и OSD имеем $\frac{OS}{OE} = \frac{SD}{OD}$, поэтому $OS = \frac{SD}{OD} a$. Кроме того,

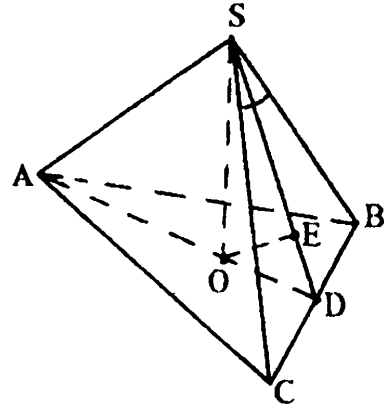


Рис. 71.

$$\begin{aligned} OD &= \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{1}{3} \sqrt{BC^2 - CD^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{4CD^2 - CD^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} CD. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$OS = \frac{SD}{OD} a = \sqrt{3} a \frac{SD}{CD} = \sqrt{3} a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

2. $\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} a$.

Решение. Пусть S – вершина данного трехгранного угла, а точка O расположена внутри угла на расстоянии $a = OF$ от его ребер (рис. 72). Проведя через точку O плоскость, перпендикулярную отрезку OS , получим правильную треугольную пирамиду $SABC$, в которой отрезок SO является высотой пирамиды. Кроме того, точка O является центром основания ABC , поэтому $AO = \frac{2}{3} AD$, где D есть середина стороны BC . Следовательно, если ED перпендикулярно ребру AS , то $ED = \frac{3}{2} OF = \frac{3}{2} a$.

Далее, по условию задачи угол BEC равен α , поэтому $EC = \frac{ED}{\cos(\alpha/2)} = \frac{3a}{2\cos(\alpha/2)}$ и $AC = BC = 2CD = 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot ED = 3a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Кроме того, $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{1}{\sqrt{3}}AC = \sqrt{3}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, поэтому $AF^2 = AO^2 - OF^2 = (3\operatorname{tg}^2(\alpha/2) - 1)a^2$, т.е. $AF = \sqrt{3\operatorname{tg}^2(\alpha/2) - 1}a$.

Наконец, прямоугольные треугольники ASO и AFO имеют общий острый угол SAO , поэтому они подобные. Но тогда $\frac{OS}{AO} = \frac{OF}{AF}$, откуда искомая величина

$$OS = \frac{OF \cdot AO}{AF} = \frac{a \cdot \sqrt{3}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{a\sqrt{3\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} = \frac{\sqrt{3}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

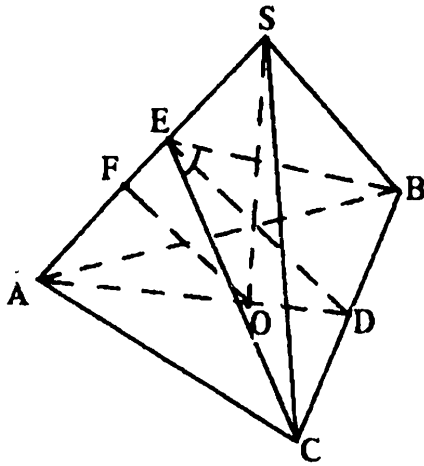


Рис. 72.

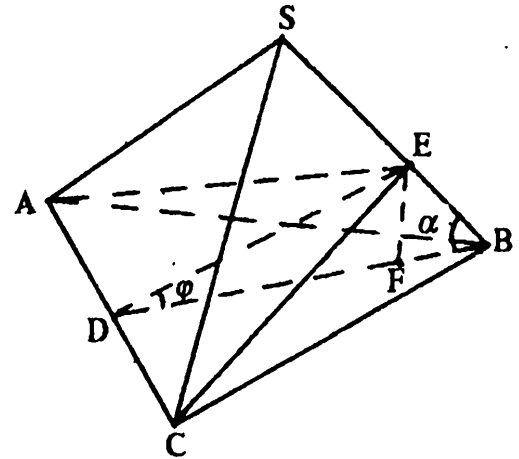


Рис. 73.

$$3. \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{8 \sin(\alpha + \varphi)} a^3.$$

Решение. На рис. 73 треугольник AEC есть сечение данной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через сторону основания AC под углом φ к плоскости основания. Если D — середина стороны AC , то $\angle EDB = \varphi$, $\angle SBD = \alpha$. Кроме того, площадь треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Найдем высоту EF пирамиды $EABC$. По теореме синусов для треугольника DEB имеем соотношение

$$\frac{DE}{\sin \alpha} = \frac{DB}{\sin(\pi - \alpha - \beta)},$$

т.е. $DE = \frac{DB \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}$. Следовательно,

$$EF = DE \sin \varphi = \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} DB.$$

В то же время $DB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ как высота равностороннего треугольника ABC со стороной a , поэтому

$$EF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} a.$$

В результате получаем искомый объем:

$$V = \frac{1}{3} EF \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} a^3.$$

$$4. \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos \varphi \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha \sin^2(\alpha + \varphi)} a^3.$$

Решение. На рис. 74 четырехугольник $ABFE$ является сечением пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через сторону AB под углом φ к плоскости основания, SO – высота пирамиды, SN – высота пирамиды $SABFE$, $\angle HGK = \varphi$, $AG = GB = DK = KC = a/2$. Рассмотрим треугольник HGK , в котором $\angle HGK = \varphi$, $\angle HKG = \alpha$.

По теореме синусов

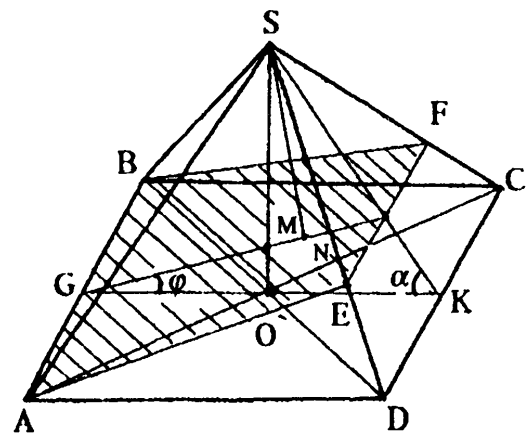


Рис. 74.

$$\frac{GH}{\sin \alpha} = \frac{GK}{\sin(\pi - \alpha - \varphi)},$$

т.е.

$$GH = GK \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} = a \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Аналогично $KH = a \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$.

Кроме того, в треугольнике SOK имеем $SK = \frac{a}{2 \cos \alpha}$. Отметим также, что

$$\frac{EF}{DC} = \frac{SH}{SK} = \frac{SK - KH}{SK} = 1 - \frac{KH}{SK},$$

поэтому

$$\begin{aligned} EF &= a \left(1 - \frac{KH}{SK} \right) = a \left(1 - \frac{a \sin \varphi \cdot 2 \cos \alpha}{\sin(\alpha + \varphi) a} \right) = \\ &= \frac{a \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}. \end{aligned}$$

Площадь трапеции $ABFE$ равна

$$\frac{1}{2}(AB + EF)GH = \frac{\sin^2 \alpha \cos \varphi}{\sin^2(\alpha + \varphi)} a^2,$$

а высота $SN = SH \cdot \sin \angle SHN = SH \cdot \sin(\alpha + \varphi) = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{2 \cos \alpha} a$.

Следовательно, объем

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos \varphi \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha \sin^2(\alpha + \varphi)} a^3.$$

$$5. \frac{a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Решение. На рис. 75 начало декартовой системы координат совпадает с вершиной основания пирамиды, ось Oz направлена по высоте этой пирамиды, совпадающей с ребром, а ось Ox — по стороне ее основания, так, чтобы основание лежало в верхней полуплоскости ($y \geq 0$) координатной плоскости Oxy . Тогда вершины пирамиды имеют координаты $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(a \cos \alpha, a \sin \alpha, 0)$ и $(0, 0, a \operatorname{tg} \alpha)$.

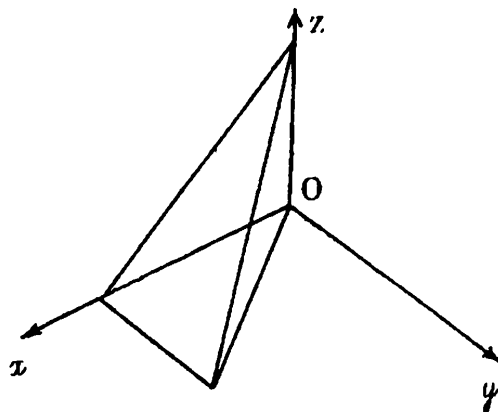


Рис. 75.

Пусть r — радиус описанного шара, а координаты центра шара x, y, z . Запишем четыре уравнения для координат x, y, z и радиуса r :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, & (x - a)^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ (x - a \cos \alpha)^2 + (y - a \sin \alpha)^2 + z^2 &= r^2, \\ x^2 + y^2 + (z - a \operatorname{tg} \alpha)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Из первого и второго уравнений находим $x = a/2$. Аналогично, сравнивая первое уравнение с третьим и четвертым, получаем

$$y = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin \alpha} a = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad z = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда подстановка найденных значений координат центра шара в первое уравнение дает $r = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

$$6. b \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Решение. Пусть точка O — центр вписанного шара, r — его радиус (рис. 76). Проведя через центр шара сечение плоскостью KMN , параллельной плоскости основания, получим в сечении шара большой круг, касающийся двух сторон

треугольника KM и KN , но не касающийся третьей стороны MN , так как касание шара с гранью SBC произойдет в точке, лежащей выше сечения KMN .

Так как круг касается KM и KN , то его центр O лежит на биссектрисе угла MKN , равного α . Тогда из треугольника KOF получаем $KO = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$.

Но $KO = AE$,

$$AE + ED = AD = b \cos \frac{\alpha}{2},$$

поэтому

$$\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = b \cos \frac{\alpha}{2},$$

откуда

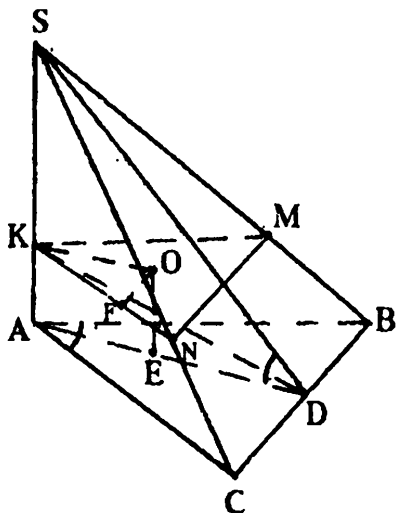


Рис. 76.

$$\frac{1 + \cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} r = b \cos(\alpha/2).$$

Таким образом,

$$r = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} b = b \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

7. $\frac{\sqrt{3}a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 \cos \alpha + 1}}.$

Решение. Если точка O — центр шара, описанного около пирамиды $SABC$, SO — высота пирамиды, то продолжение SO пересекает сферу в некоторой точке D и проходит через центр шара O , причем $SD = 2R$, где R — искомый радиус (рис. 77).

Имеем $a/2 = FB = SB \sin(\alpha/2) = O_1B \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \cdot O_1B$, поэтому $O_1A = O_1B = a/\sqrt{3}$, $SA = SB = \frac{a}{2 \sin(\alpha/2)}$.

Треугольники ASD и ASO_1 подобные, так как высота SO_1 лежит на диаметре SD , поэтому треугольник ASD прямоугольный, а треугольники ASD и ASO_1 имеют общий острый угол. Следовательно, $\frac{SD}{AD} = \frac{SA}{AO_1}$, откуда получаем

$$\frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \left(\frac{a}{2\sin(\alpha/2)}\right)^2}} = \frac{\frac{a}{2\sin(\alpha/2)}}{a/\sqrt{3}},$$

$$4R \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \sqrt{4R^2 - \frac{a^2}{4\sin^2(\alpha/2)}},$$

$$16R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 12R^2 - \frac{3a^2}{4\sin^2(\alpha/2)},$$

$$4R^2 \left(3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3a^2}{4\sin^2(\alpha/2)}.$$

Таким образом, $R = \frac{\sqrt{3}a}{4\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2\cos \alpha + 1}}.$

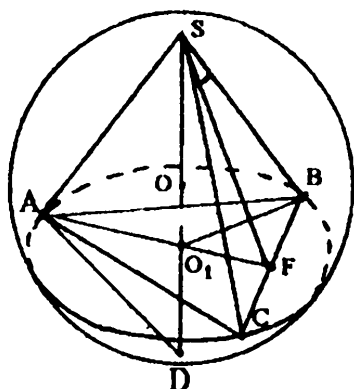


Рис. 77.

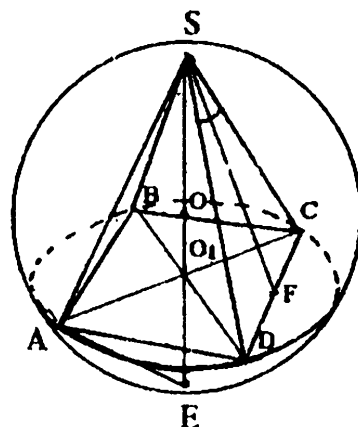


Рис. 78.

8. $\frac{a}{4\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}.$

Решение. Если точка O – центр шара, описанного около пирамиды $SABCD$, SO_1 – высота пирамиды, то продол-

жение SO_1 пересекает сферу в некоторой точке E и проходит через центр шара O , причем $SE = 2R$, где R – искомый радиус (рис. 78). Если SF – высота грани SCD , то $DF = FC = a/2$, поэтому

$$AS = CS = \frac{FC}{\sin(\alpha/2)} = \frac{a}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

Кроме того, $AO_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Так как SE – диаметр, треугольник ASE прямоугольный. Следовательно, треугольники ASO_1 и ASE подобные как прямоугольные треугольники с общим острым углом. В результате получаем, что $\frac{SE}{AS} = \frac{AS}{O_1S}$, т.е. $SE = \frac{AS^2}{O_1S}$. Но по теореме Пифагора, примененной к треугольнику ASO_1 , катет

$$\begin{aligned} O_1S &= \sqrt{AS^2 - AO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin(\alpha/2)}\right)^2 - \frac{a^2}{2}} = \\ &= \frac{a}{2 \sin(\alpha/2)} \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2R = SE &= \left(\frac{a}{2 \sin(\alpha/2)}\right)^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{a \sqrt{\cos \alpha}} = \\ &= \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$R = \frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}.$$

9. $\arccos \frac{1-3\cos^2 \alpha}{2}$ ($0 < \alpha < \pi/2$).

Решение. Пусть a – длина стороны основания пирамиды $SABC$ (рис. 79), SD – высота грани BSC , поэтому AD – высота основания ABC . Кроме того, пусть BE перпендикулярно ребру AS , а SO – высота пирамиды. Тогда $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, поэтому $SD = \frac{OD}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}a}{6\cos \alpha}$, а по теореме Пифагора из треугольника SBD получаем

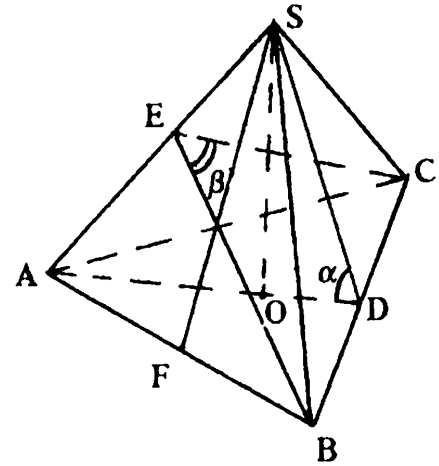


Рис. 79.

$$BS^2 = BD^2 + SD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12\cos^2 \alpha} = \frac{a^2}{12\cos^2 \alpha}(3\cos^2 \alpha + 1),$$

откуда $BS = \frac{a}{2\sqrt{3}\cos \alpha} \sqrt{3\cos^2 \alpha + 1}$.

Пусть SF – высота боковой грани ASB , т.е. SF перпендикулярно AB . Тогда $SF = SD$, а из подобия треугольников AEB и ASF получаем $\frac{AB}{BE} = \frac{AS}{SF}$, поэтому

$$BE = \frac{AB \cdot SF}{AS} = \frac{a \frac{\sqrt{3}a}{6\cos \alpha}}{\frac{a}{2\sqrt{3}\cos \alpha} \sqrt{3\cos^2 \alpha + 1}} = \frac{a}{\sqrt{3\cos^2 \alpha + 1}}.$$

Величина двугранного угла, образованного гранями ASB и ASC , равна β – величине линейного угла BEC . По теореме косинусов для треугольника BEC имеем

$$a^2 = BC^2 = 2BE(1 - \cos \beta) = \frac{2a^2}{3\cos^2 \alpha + 1}(1 - \cos \beta),$$

откуда $3\cos^2 \alpha + 1 = 2 - 2\cos \beta$, т.е. $\cos \beta = \frac{1}{2}(1 - 3\cos^2 \alpha)$. Отметим, что $0 < \alpha < \pi/2$, $\pi/3 < \beta < \pi$. Следовательно,

$$\beta = \arccos \left(\frac{1}{2}(1 - 3\cos^2 \alpha) \right).$$

$$10. \pi - \arccos(\cos^2 \alpha).$$

Решение. Пусть a — длина стороны основания пирамиды $SABCD$ (рис. 80), SF — высота боковой грани CSD , поэтому $CF = FD = a/2$. Если SO — высота пирамиды, то $OF = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$, поэтому из треугольника OSF находим $SF = \frac{OF}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$.

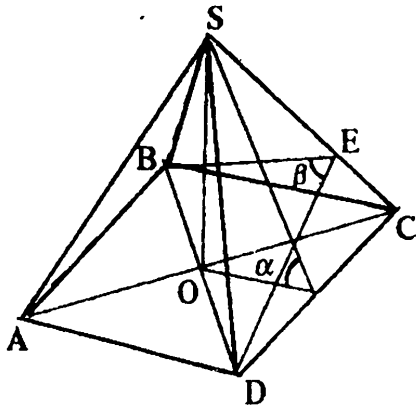


Рис. 80.

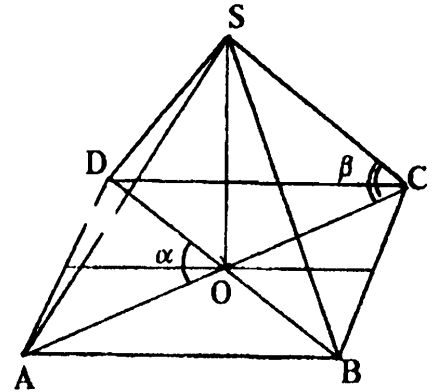


Рис. 81.

Пусть DE перпендикулярно ребру CS . Тогда BE также перпендикулярно CS , а искомый двугранный угол измеряется линейным углом $\beta = \angle BED$.

Далее, чтобы определить длину DE , отметим, что прямоугольные треугольники CDE и CFS имеют общий острый угол при вершине C . Отсюда следует, что эти треугольники подобные, поэтому $\frac{CD}{SC} = \frac{DE}{SF}$, т.е. $DE = \frac{CD \cdot SF}{CS}$. Но по теореме Пифагора, примененной к треугольнику CFS , получаем $CS^2 = CF^2 + SF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha}$, т.е. $CS = \frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$.

В результате находим

$$DE = \frac{a \cdot \frac{a}{2 \cos \alpha}}{\frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}.$$

Наконец, по теореме косинусов из треугольника BDE имеем соотношение

$$\begin{aligned} 2a^2 &= BD^2 = DE^2 + BE^2 - 2DE \cdot BE \cos \beta = \\ &= 2DE^2(1 - \cos \beta) = \frac{2a^2}{1 + \cos^2 \alpha}(1 - \cos \beta), \end{aligned}$$

откуда $1 + \cos^2 \alpha = 1 - \cos \beta$, т.е. $\cos^2 \alpha = -\cos \beta$.

Таким образом, $\beta = \pi - \arccos(\cos^2 \alpha)$.

11. $\frac{\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{6 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} a^3$.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD основания пирамиды (рис. 81). В равнобедренном треугольнике ASC отрезок SO является медианой, так как диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что SO является также высотой, т.е. SO перпендикулярно AC . Аналогично SO перпендикулярно BD , поэтому SO перпендикулярно плоскости основания, т.е. SO – высота данной пирамиды. В частности, отсюда получаем $\angle SCO = \beta$.

Пусть EF – средняя линия основания пирамиды. Тогда $\angle COF = \frac{\alpha}{2}$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{FC}{OF} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad OF = \frac{FC}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \\ AB = CD &= 2OF = \frac{a}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, площадь основания равна $AB \cdot BC = \frac{a^2}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}$.

Наконец, диагональ

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 1} = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

а $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2 \sin(\alpha/2)}$. В то же время $\frac{OS}{OC} = \operatorname{tg} \beta$, поэтому

$$\text{получаем } SO = OC \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, искомый объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta a^3}{6 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

12. $\frac{1}{6} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta a^3.$

Решение. Пусть $SABCD$ – данная пирамида (рис. 82), O – точка пересечения диагоналей AC и BD в основании пирамиды. Так как диагонали ромба пересекаются под прямым углом, треугольник OCD прямоугольный, поэтому $OC = CD \cos(\alpha/2) = a \cos(\alpha/2)$.

Кроме того, легко видеть, что SO одновременно перпендикулярно AC и BD , поэтому SO перпендикулярно плоскости основания пирамиды и, значит, является высотой пирамиды.

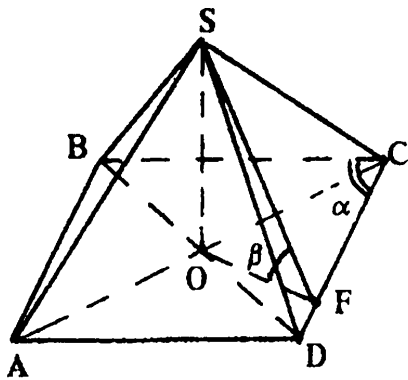


Рис. 82.

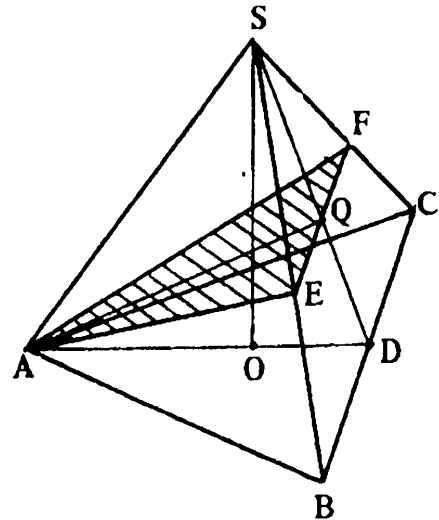


Рис. 83.

Наконец, если OF – высота треугольника OCD , проведенная из вершины O , то SF является высотой в треугольнике SCD , поэтому по условию задачи угол OFS равен β . В то же время $OF = OC \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sin \alpha$ и $OS = OF \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$. В результате получаем, что площадь основания равна $a^2 \sin \alpha$, а искомый объем

$$V = \frac{1}{3} (a^2 \sin \alpha) \cdot OS = \frac{1}{6} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta a^3.$$

13. $32/3 \text{ см}^3$.

Решение. Пусть SO – высота пирамиды $SABC$ (рис. 83), SD – высота боковой грани BSC , AQ – высота данного сечения AEF , a – длина стороны основания пирамиды. Так как угол при вершине S равен 90° , угол CBS равен 45° , поэтому $BD = SD = a/2$, $SB = SA = \sqrt{2}a/2$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике ASE гипотенуза

$$AE = \sqrt{AS^2 + SE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8}} = \frac{\sqrt{10}a}{4},$$

а в прямоугольном треугольнике AEQ катет

$$AQ = \sqrt{AE^2 - EQ^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{3}{4}a.$$

Следовательно, площадь сечения AEF равна $\frac{1}{2}AQ \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{16}a^2 = 6$, откуда получаем $a^2 = 32$, т.е. $a = 4\sqrt{2}$ см.

Наконец, $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, а в прямоугольном треугольнике SOD катет

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Таким образом, искомый объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{12\sqrt{2}} \cdot 64 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{32}{3} \text{ см}^3.$$

14. 36 см^3 .

Решение. Пусть SO – высота данной пирамиды $SABC$, SD – апофема, FE – средняя линия боковой грани ASB , a – длина стороны основания ABC (рис. 84).

Очевидно, что ED – средняя линия треугольника SBC , а FK – средняя линия треугольника ASC , поэтому KD – средняя линия треугольника ABC , а $EFKD$ – данное сечение.

Отметим, что $FE = \frac{1}{2}AB = KD$, $FK = \frac{1}{2}CS = ED$. Кроме того, $FD = KE$ как расстояния от середины бокового ребра до середины противоположной стороны основания в правильной треугольной пирамиде, поэтому сечение есть прямоугольник.

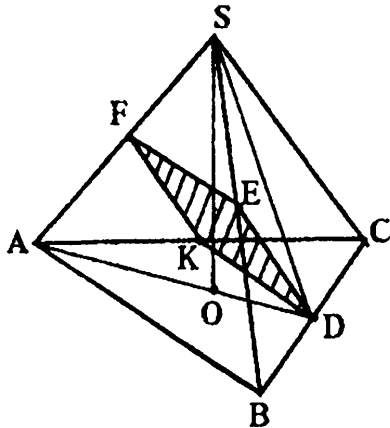


Рис. 84.

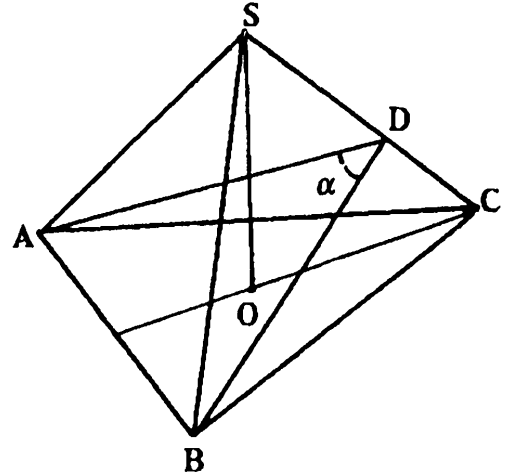


Рис. 85.

Так как плоский угол при вершине S равен 90° , $BD = SD = a/2$, $CS = \sqrt{2} \frac{a}{2}$. Следовательно, $9\sqrt{2} = ED$.

$$EF = \frac{\sqrt{2}}{4}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}, \text{ откуда } a^2 = 72, \quad a = 6\sqrt{2} \text{ см.}$$

Наконец, $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, а

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2/4 - a^2/12} = a/\sqrt{6}.$$

Таким образом, искомый объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{12\sqrt{2}}a^3 = \frac{72 \cdot 6\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = 36 \text{ см}^3.$$

$$15. \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}} \quad (\pi/3 < \alpha < \pi).$$

Решение. Пусть $SABC$ – данная пирамида (рис. 85), BD – высота боковой грани BSC , т.е. BD перпендикулярно ребру CS . Тогда и AD перпендикулярно ребру CS , а угол $\alpha = \angle BDA$ есть угол между боковыми гранями BSC и ASC . По теореме косинусов для треугольника ADB получаем $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos \alpha = 2BD^2(1 - \cos \alpha)$, поэтому

$$BD^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos \alpha)}.$$

Рассмотрим треугольник BCD . Если $\beta = \angle BCD$, то $BD = BC \sin \beta$, т.е.

$$\sin \beta = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}.$$

Наконец, если $l = CS$ – искомая величина, то $l \cos \beta = a/2$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} &= l^2 \cos^2 \beta = l^2(1 - \sin^2 \beta) = \\ &= l^2 \left(1 - \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)} \right) = l^2 \frac{1 - 2 \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$l^2 = \frac{a^2(1 - \cos \alpha)}{2(1 - 2 \cos \alpha)} = \frac{a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - 2 \cos \alpha},$$

$$\text{т.е. } l = \frac{a \sin(\alpha/2)}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}.$$

$$16. \pi - \arccos \frac{a^2}{4l^2 - a^2} \quad (l > a/\sqrt{2} > 0).$$

Решение. Пусть BE перпендикулярно ребру CS в данной пирамиде $SABCD$. Тогда и DE перпендикулярно CS ,

поэтому $\alpha = \angle BED$ — искомый угол между смежными боковыми гранями. По теореме косинусов, примененной к треугольнику BED , получаем $BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot DE \cos \alpha = 2BE^2(1 - \cos \alpha)$, откуда $1 - \cos \alpha = \frac{BD^2}{2BE^2} = \frac{a^2}{BE^2}$.

Чтобы найти BE , рассмотрим треугольник BSC . Пусть угол SCB равен β .

Тогда $a/2 = BC/2 = CS \cos \beta = l \cos \beta$, откуда $\cos \beta = \frac{a}{2l}$. Кроме того, в треугольнике BEC имеем $BE = BC \sin \beta = a \sin \beta = a \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4l^2}}$.

Таким образом,

$$1 - \cos \alpha = \frac{a^2}{BE^2} = \frac{a^2}{a^2 \left(1 - \frac{a^2}{4l^2}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{4l^2}},$$

поэтому

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{1 - \frac{a^2}{4l^2}} = -\frac{\frac{a^2}{4l^2}}{1 - \frac{a^2}{4l^2}} = -\frac{a^2}{4l^2 - a^2},$$

откуда

$$\pi - \alpha = \arccos \frac{a^2}{4l^2 - a^2},$$

т.е. $\alpha = \pi - \arccos \frac{a^2}{4l^2 - a^2}$.

$$17. \frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{2 \sin 2\alpha} r.$$

Решение. Пусть SO — высота данной пирамиды $SABC$ (рис. 86). Тогда $AO = BO = CO = r$ — радиус окружности, описанной около основания пирамиды. Ясно, что $AO = 2OD$, т.е. $OD = r/2$. Но тогда

$$CB = 2CD = 2\sqrt{r^2 - r^2/4} = \sqrt{3}r, \quad SD = \frac{OD}{\cos \alpha} = \frac{r}{2 \cos \alpha}.$$

Рассмотрим треугольник CO_1B , где O_1 — центр описанного шара. Тогда $O_1S = O_1C = R$ — искомый радиус,

$O_1D = \sqrt{R^2 - CD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - 3r^2}$. Наконец, в треугольнике O_1SD по теореме косинусов имеем

$$O_1D^2 = O_1S^2 + SD^2 - 2O_1S \cdot SD \cos(\pi/2 - \alpha),$$

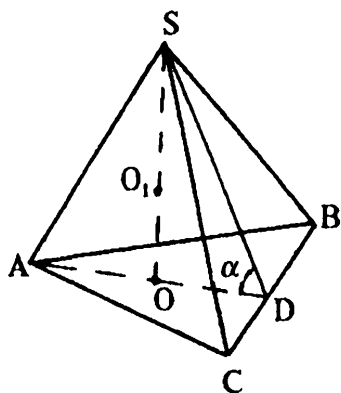


Рис. 86.

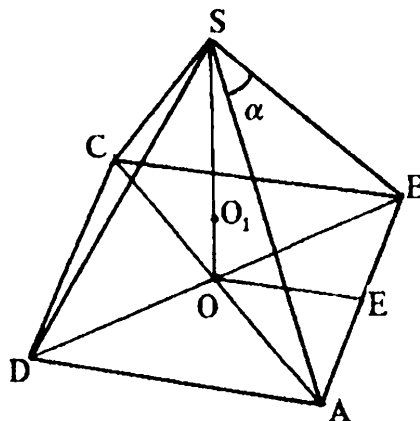


Рис. 87.

т.е.

$$R^2 - \frac{3}{4}r^2 = R^2 + \frac{r^2}{4 \cos^2 \alpha} - 2R \frac{r}{2 \cos \alpha} \sin \alpha,$$

откуда

$$R \frac{r}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 3 \right).$$

Следовательно,

$$R = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} r = \frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{2 \sin 2\alpha} r.$$

18. $\frac{a}{2\sqrt{\cos \alpha}}.$

Решение. В пирамиде $SABCD$ (рис. 87) точка E — середина стороны AB основания. Тогда $AE = EB = a \sin(\frac{\alpha}{2})$, где $a = SA$ — длина бокового ребра, а $\angle ASB = \alpha$ — плоский угол при вершине S . Если точка O — центр основания, то $OA = \sqrt{2} a \sin(\alpha/2)$,

$$OS = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a \sqrt{1 - 2 \sin^2(\alpha/2)} = a \sqrt{\cos \alpha}.$$

Пусть O_1 – центр шара, описанного около пирамиды. Тогда по теореме косинусов в треугольнике O_1SA имеем $O_1A^2 = O_1S^2 + SA^2 - 2O_1S \cdot SA \cos \angle ASO$. Так как $O_1A = O_1S = R$, это равенство можно записать в виде $R^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \angle ASO$, т.е. $a^2 - 2aR \cos \angle ASO = 0$, где $\cos \angle ASO = \frac{OS}{SA} = \sqrt{\cos \alpha}$.

Таким образом, искомый радиус описанного шара $R = \frac{a}{2\sqrt{\cos \alpha}}$.

$$19. -\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha} b^2.$$

Решение. Так как боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания, высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Радиус этой

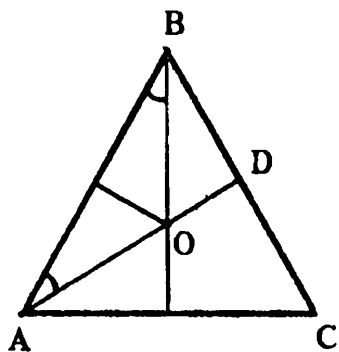


Рис. 88.

окружности $\frac{b}{2 \sin \alpha}$, поэтому высота пирамиды равна $\frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha}$. Кроме того, высота пирамиды является высотой рассматриваемого треугольного сечения. Чтобы найти площадь сечения, достаточно определить его основание. Для этого рассмотрим треугольник ABC , лежащий в основании пирамиды (рис.88).

Пусть точка O есть центр описанной окружности. Отметим, что условие $\alpha > \pi/4$ означает, что центр окружности лежит внутри основания. Так как $\angle BAD = \angle ABO = \pi/2 - \alpha$, то $\angle BDA = \pi - (\pi/2 - \alpha) - (\pi - 2\alpha) = 3\alpha - \pi/2$.

По теореме синусов для треугольника ABD получаем

$$\frac{AD}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{AB}{\sin(3\alpha - \frac{\pi}{2})},$$

поэтому

$$AD = \frac{\sin(\pi - 2\alpha)}{\sin(3\alpha - \frac{\pi}{2})} \cdot AB = -\frac{b \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha} \cdot \left(-\frac{b \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha} \right) = -\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha} b^2.$$

20. $\frac{a^2}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$

Решение. Очевидно, что сечением является треугольник, основание которого равно $a \sin \alpha$. Чтобы найти высоту этого треугольника, отметим, что она одновременно является и высотой данной пирамиды. Так как по условию задачи боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания, высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

Пусть точка O – центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$ в основании пирамиды (рис. 89). Тогда точка O одинаково удалена от вершин трапеции, поэтому $AO = BO = CO = R$ – радиус окружности. Кроме того, по условию $AB = BC = a$. Следовательно, треугольники AOB и BOC равны по трем сторонам, поэтому $\angle ABO = \angle CBO$.

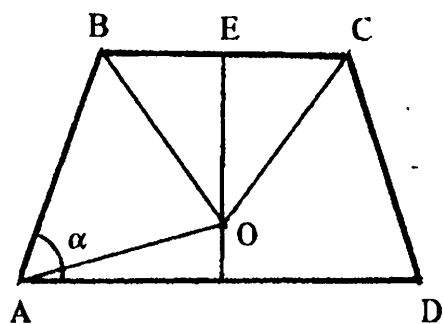


Рис. 89.

Отсюда получаем, что $\angle CBO = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. Наконец, если точка E есть середина меньшего основания трапеции, то $BE = a/2$, поэтому

$$R = BO = \frac{BE}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом, высота пирамиды равна $R \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$, а искомая площадь сечения

$$S = \frac{1}{2}(a \sin \alpha) \left(\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta a^2.$$

В заключение отметим, что условие $\alpha > \pi/3$ означает, что центр окружности, описанной около основания, лежит внутри основания.

21. Искомое отношение равно 1.

Решение. Пусть E, L, K, M – середины ребер AB, AS, CS, BC (рис. 90). Рассмотрим еще точку N , являющуюся серединой ребра AC .

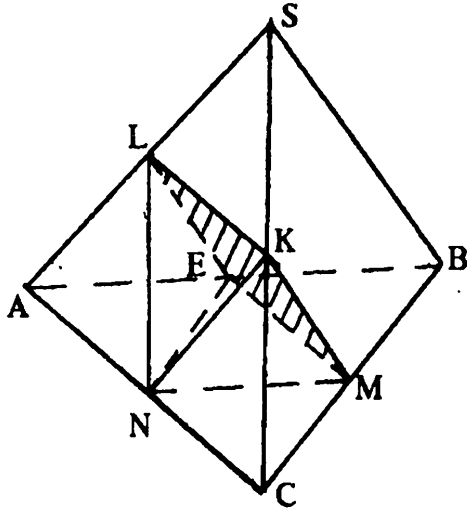


Рис. 90.

Та часть пирамиды, которая содержит точку A , состоит из пирамид $ALNE, NKMC, NMKE$ и $NEKL$. Если V – объем пирамиды $SABC$, то каждая из этих четырех пирамид имеет объем, равный $\frac{1}{8}V$, поэтому их сумма составляет половину объема основной пирамиды.

Следовательно, искомое отношение равно единице.

22. $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть V – объем данной пирамиды $SABC$. Рассмотрим пирамиду $ACBC'$. Ее высота $h_1 = \frac{1}{4}h$, где h – высота пирамиды $SABC$, исходящая из вершины S . Следовательно, объем второй пирамиды $V_{ABCC'} = \frac{1}{4}V$, откуда $V_{ABC'S} = \frac{3}{4}V$. Аналогично получаем $V_{AB'C'S} = \frac{2}{3}V_{ABC'S}$, $V_{A'B'C'S} = \frac{1}{2}V_{AB'C'S}$.

Таким образом, $V_{A'B'C'S} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{1}{4}V$, поэтому искомое отношение равно

$$\frac{\frac{1}{4}V}{V - \frac{1}{4}V} = \frac{1}{3}.$$

$$23. \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} a.$$

Решение. Пусть точка O является центром шара, вписанного в восьмигранник. Тогда O является также центром основания пирамид (рис. 91).

Ясно, что искомый радиус шара R равен расстоянию от точки O до грани SDC . Пусть SE - апофема. Тогда $DE = OE = a/2$, $SE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ и

$$\begin{aligned} OS &= \sqrt{SE^2 - OE^2} = \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} a. \end{aligned}$$

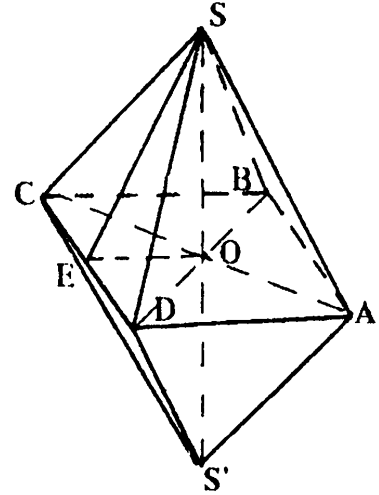


Рис. 91.

Вычисляя площадь треугольника SOE двумя способами, получаем равенство $\frac{1}{2} R \cdot SE = \frac{1}{2} OS \cdot OE$, откуда

$$R = \frac{OS \cdot OE}{SE} = \frac{\frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} a.$$

$$24. \frac{1}{6} \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} a.$$

Решение. Пусть точка O является центром шара, вписанного в шестигранник. Тогда O является также центром основания пирамид $SABC$ и $S'ABC$ (рис. 92).

Ясно, что искомый радиус шара R равен расстоянию от точки O до грани SBC . Пусть SD - апофема. Тогда $CD = a/2$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, $OD = \frac{AD}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Кроме того,

$$SD = CD \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

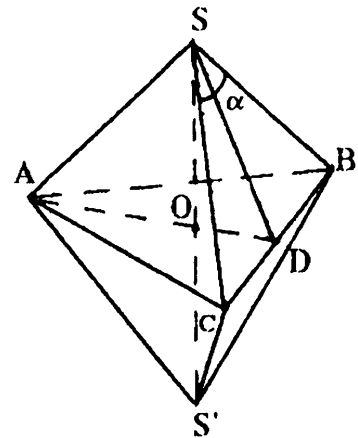


Рис. 92.

$$OS = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} a.$$

Вычисляя площадь треугольника SOD двумя способами, получаем равенство $\frac{1}{2}R \cdot SD = \frac{1}{2}OD \cdot OS$, откуда

$$R = \frac{OD \cdot OS}{SD} = \frac{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} a}{6 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} a.$$

25. $2\sqrt{\cos \alpha} R$.

Решение. Хорды, проведенные из точки S , образуют правильную четырехугольную пирамиду, высота которой SO лежит на некотором диаметре SE (рис. 93).

Пусть $x = SA$ — искомая величина. Тогда

$$FC = SC \sin(\alpha/2) = x \sin(\alpha/2) = \frac{OC}{\sqrt{2}},$$

поэтому $OC = \sqrt{2} x \sin(\alpha/2)$.

Кроме того, в прямоугольном треугольнике AES имеем равенство $AE^2 = SE^2 - SA^2 = 4R^2 - x^2$.

Наконец, треугольники ASE и ASO подобные, поэтому $\frac{SE}{AE} = \frac{SA}{AO}$, т.е.

$$\frac{2R}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2} x \sin(\alpha/2)}.$$

Следовательно,

$$2\sqrt{2} R \sin(\alpha/2) = \sqrt{4R^2 - x^2},$$

откуда $x = 2\sqrt{\cos \alpha} R$.

$$26. \frac{2R}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Решение. Хорды, проведенные из точки S , образуют правильную треугольную пирамиду, высота которой SO лежит на некотором диаметре SD (рис. 94).

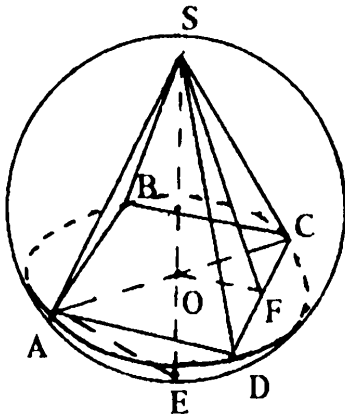


Рис. 93.

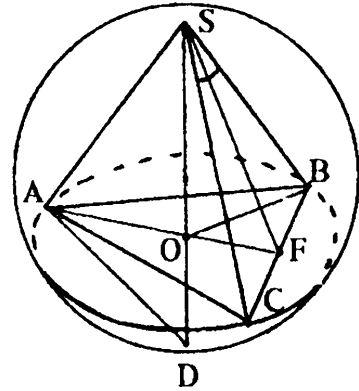


Рис. 94.

Пусть $x = SA$ — искомая величина. Проведя апофему SF , в прямоугольном треугольнике BSF получаем $BF = SB \sin \frac{\alpha}{2} = x \sin \frac{\alpha}{2}$, поэтому $BC = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$, а $OA = OB = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{2}{\sqrt{3}}x \sin \frac{\alpha}{2}$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике SAD имеем равенство $AD^2 = SD^2 - AS^2 = 4R^2 - x^2$.

Наконец, прямоугольные треугольники ASD и ASO подобные как имеющие общий острый угол, поэтому $\frac{SD}{AS} = \frac{AD}{AO}$, т.е.

$$\frac{2R}{x} = \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}x \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$4R \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4R^2 - x^2},$$

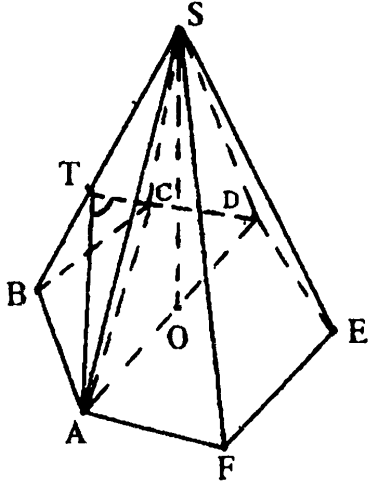
$$16R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 12R^2 - 3x^2,$$

$$3x^2 = 4R^2 \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$x = \frac{2R}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$27. \frac{\sqrt{3} \cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{-(1 + 2 \cos \beta)}} a^2 \quad (2\pi/3 < \beta < \pi).$$

Решение. Пусть $SAB C D E F$ (рис. 95) – данная пирамида, AT перпендикулярно ребру BS , $AB = a$ – длина стороны основания, точка O – центр основания, $\angle ATC = \beta$. По теореме косинусов для треугольника ATC имеем



$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2AT \cdot CT \cos \beta.$$

$$CT \cos \beta = 2(1 - \cos \beta) AT^2.$$

Рис. 95.

Так как $AC = \sqrt{3} a$, откуда получаем $3a^2 = 2(1 - \cos \beta) \times AT^2$, поэтому $AT = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(1 - \cos \beta)}} a$. Если $\angle ABS = \alpha$, то

$$AT = AB \sin \alpha = a \sin \alpha. \text{ Следовательно, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(1 - \cos \beta)}}.$$

Теперь легко найти $AS = BS$ из соотношения $BS \cos \alpha = a/2$:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{3}{2(1 - \cos \beta)}} = \sqrt{\frac{-(1 + 2 \cos \beta)}{2(1 - \cos \beta)}},$$

$$AS = BS = \frac{a}{2 \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2(1 - \cos \beta)}{-(1 + 2 \cos \beta)}} \cdot \frac{a}{2}.$$

Наконец, по теореме Пифагора для треугольника AOS получаем

$$OS^2 = AS^2 - AO^2 = -\frac{1 - \cos \beta}{2(1 + 2 \cos \beta)} a^2 - a^2 =$$

$$= -\frac{3(1 + \cos \beta)}{2(1 + 2 \cos \beta)} a^2 = -\frac{3 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 2 \cos \beta} a^2,$$

откуда

$$OS = \sqrt{3} \cos \frac{\beta}{2} \frac{a}{\sqrt{-(1 + 2 \cos \beta)}}.$$

Таким образом, искомая площадь диагонального сечения ASD равна

$$\frac{1}{2} AD \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cos \frac{\beta}{2} a^2}{\sqrt{-(1 + 2 \cos \beta)}} = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{-(1 + 2 \cos \beta)}} a^2$$

$(2\pi/3 < \beta < \pi).$

$$28. \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos \alpha}} a^2 \quad (\pi/2 < \alpha < \pi).$$

Решение. Пусть $SABCD$ (рис. 96) – данная пирамида, AE и CE перпендикулярны ребру SB , $\angle AEC = \alpha$, $AB = a$ – длина стороны основания, точка O – центр основания.

По теореме косинусов для треугольника AEC имеем $2a^2 = AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \cdot CE \cos \alpha = 2(1 - \cos \alpha)AE^2$, поэтому $AE = \frac{a}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}$.

Пусть $\angle ABS = \beta$. Тогда

$$\sin \beta = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sqrt{-\cos \alpha}}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$BS = \frac{EB}{\cos \beta} = \frac{a}{2\sqrt{-\cos \alpha}} \sqrt{1 - \cos \alpha},$$

откуда легко найти высоту пирамиды SO :

$$SO^2 = BS^2 - OB^2 = \frac{a^2}{4(-\cos \alpha)}(1 - \cos \alpha) - \frac{a^2}{2} =$$

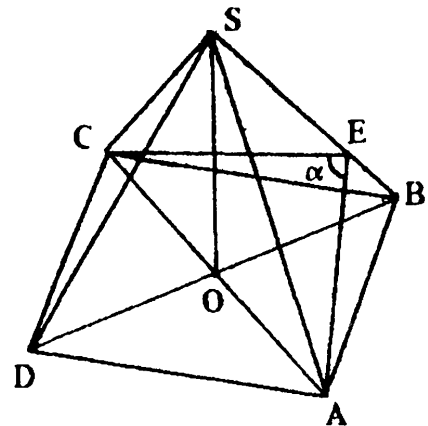


Рис. 96.

$$= \frac{a^2}{4(-\cos \alpha)}(1 + \cos \alpha),$$

т.е. $SO = \frac{a}{2\sqrt{-\cos \alpha}} \sqrt{1 + \cos \alpha}.$

В результате получаем, что искомая площадь диагонального сечения равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot SO = \frac{\cos(\alpha/2)}{2\sqrt{-\cos \alpha}} a^2.$$

29. $\frac{lS}{3 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}.$

Решение. Пусть BK – высота, опущенная из вершины B на плоскость основания ADC , MK перпендикулярно DC , а NK перпендикулярно AD (рис. 97). Прямоугольные треугольники DMB и DNB имеют общую гипотенузу BD и равные острые углы α , поэтому они равны, откуда следует, что $MD = ND$ и $MB = NB$. Так как треугольники DMK и DNK равны по трем сторонам, то $\angle KDA = \alpha/2$. Кроме того, из треугольника DBN получаем, что $DN = l \cos \alpha$, а из треугольника DNK имеем

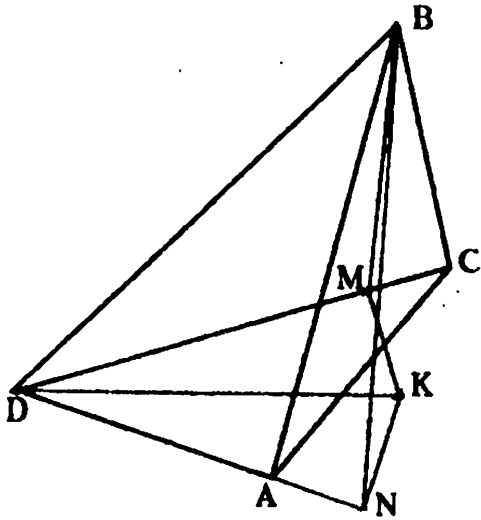


Рис. 97.

$$DK = \frac{DN}{\cos(\alpha/2)} = \frac{l \cos \alpha}{\cos(\alpha/2)}.$$

Наконец, по теореме Пифагора, примененной к треугольнику DBK , получаем

$$\begin{aligned} BK &= \sqrt{DB^2 - DK^2} = \\ &= \sqrt{l^2 - \left(\frac{l \cos \alpha}{\cos(\alpha/2)} \right)^2} = \frac{l}{\cos(\alpha/2)} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый объем

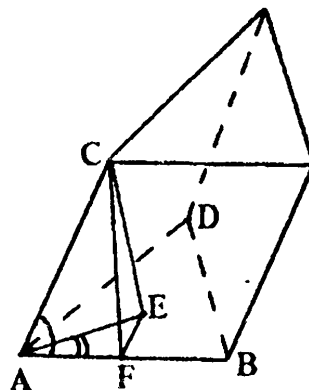
$$V = \frac{1}{3} S \cdot BK = \frac{lS}{3 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}.$$

30. $\frac{lS}{\cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}.$

Решение. Пусть AE есть проекция бокового ребра AC на плоскость основания ABD (рис. 98). Так как $\angle CAB = \angle CAD$, то $\angle EAB = \angle EAD = \beta$.

Проведя EF перпендикулярно AB , получим прямоугольные треугольники AEF и ACF , для которых $\angle EAF = \beta$ и $\angle CAF = \alpha$. Но тогда из треугольника AEF получаем $AF = AE \cos \beta = l \cos \beta$, а из треугольника ACF —

$$AC = \frac{AF}{\cos \alpha} = \frac{l \cos \beta}{\cos \alpha}.$$



Теперь высоту призмы CE легко найти из прямоугольного треугольника ACE :

Рис. 98.

$$\begin{aligned} CE &= \sqrt{AC^2 - AE^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{l \cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 - l^2} = \frac{l}{\cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомый объем призмы

$$V = S \cdot CE = \frac{lS}{\cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}.$$

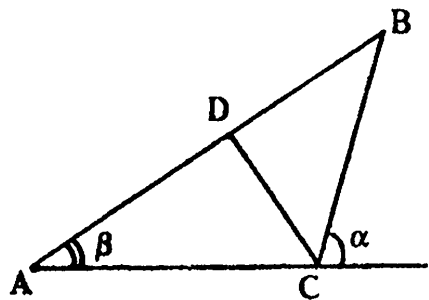
31. $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} a^2.$

Решение. Ясно, что в сечении получится равнобедренный треугольник, основание которого равно a . Следовательно,

достаточно найти его высоту. Для этого проведем сечение плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через высоту основания, опущенную из данной вершины.

В этом сечении мы получим треугольник ABC (рис. 99), у которого $\angle BAC = \beta$, а внешний угол при вершине C равен α . Отсюда следует, что угол при вершине B равен $\alpha - \beta$.

Если CD перпендикулярно AB , то $AD = AC \cos \beta =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos \beta$, $DB = CD \operatorname{ctg} (\alpha -$
 $-\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \beta \operatorname{ctg} (\alpha - \beta)$.



В результате получаем, что искомая высота

Рис. 99.

$$AB = AD + DB = \frac{\sqrt{3}}{2} a (\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} (\alpha - \beta)) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} a.$$

Таким образом, площадь сечения равна

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)} a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} a^2.$$

$$32. \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} a^2.$$

Решение. Ясно, что в сечении получится ромб, одна из диагоналей которого равна $\sqrt{2} a$. Следовательно, достаточно найти длину второй диагонали. Для этого проведем сечение плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через диагональ основания, содержащую данную вершину.

В этом сечении мы получим треугольник ABC (рис. 99), у которого $\angle BAC = \beta$, а внешний угол при вершине C равен α , поэтому угол при вершине B равен $\alpha - \beta$.

Так как $AC = \sqrt{2}a$ — диагональ квадрата со стороной a , то $AD = AC \cos \beta = \sqrt{2}a \cos \beta$, $DB = CD \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \sqrt{2}a \sin \beta \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$. Следовательно, диагональ сечения

$$\begin{aligned} AB &= AD + DB = \\ &= \sqrt{2}a(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)) = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}a. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая площадь сечения равна

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}a) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}a \right) = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}a^2.$$

33. $2ab \sin \alpha \cdot \sqrt{-ab \cos \alpha}$.

Решение. Площадь основания $S = bh = ab \cos(\alpha - \pi/2)$. Большую диагональ d_1 можно найти по теореме косинусов: $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. Кроме того, закон параллелограмма дает соотношение $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где d_2 — меньшая диагональ параллелограмма. Следовательно, $d_2^2 = 2(a^2 + b^2) - d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$.

Наконец, боковое ребро H , выходящее из тупого угла, можно найти из прямоугольного треугольника, образованного этим ребром, меньшей диагональю основания и меньшей диагональю параллелепипеда: $H^2 = d_1^2 - d_2^2 = -4ab \cos \alpha$.

Таким образом, искомый объем

$$V = SH = 2ab \sin \alpha \sqrt{-ab \cos \alpha}.$$

34. $ab \sin \alpha \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha}$.

Решение. Очевидно, что площадь основания $S = ab \sin \alpha$. Чтобы найти объем данного параллелепипеда, достаточно определить его боковое ребро h .

Но по теореме косинусов можно найти меньшую диагональ основания d : $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. Кроме того, по условию

задачи d совпадает с большей диагональю боковых граней, поэтому получаем $h^2 + b^2 = d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, т.е. $h^2 = a^2 - 2ab \cos \alpha$ и $h = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha}$.

Таким образом, искомый объем параллелепипеда

$$V = Sh = ab \sin \alpha \sqrt{a^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

35. $2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}.$

Решение. На рис. 100 AC — диагональ основания $ABCD$, EO перпендикулярно AC , EF перпендикулярно AD . Тогда имеем

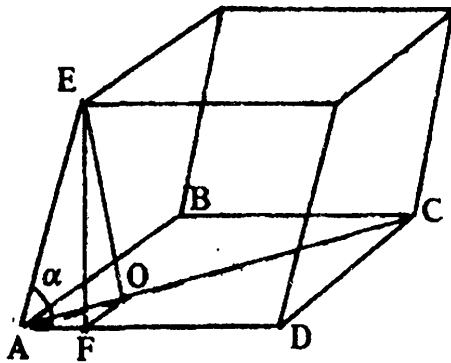


Рис. 100.

$$AF = AE \cos \alpha = a \cos \alpha,$$

$$AO = \frac{AF}{\cos \angle OAF} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

а по теореме Пифагора из треугольника AEO получаем

$$EO = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}.$$

Кроме того, площадь основания $ABCD$ равна $a^2 \sin \alpha$. В результате находим искомый объем

$$V = \frac{a^3 \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha} = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}.$$

36. $\frac{a^3}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$

Решение. Так как по условию задачи боковое ребро $h = a$, большая диагональ основания $d = a \operatorname{ctg} \alpha$, поэтому из закона параллелограмма получаем соотношение $d^2 + d_1^2 = 4a^2$,

где d_1 – меньшая диагональ основания параллелепипеда. Следовательно, площадь основания

$$S = \frac{1}{2}dd_1 = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{4a^2 - d^2} = \\ = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{4a^2 - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1},$$

поэтому искомый объем параллелепипеда

$$V = \frac{a^3}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

37. $\arccos(\cos \alpha \cos \beta)$.

Решение. Выполняя параллельный перенос одной из прямых, без ограничения общности можно предполагать, что данные прямые l и n пересекаются в некоторой точке O (рис. 101).

Пусть m – проекция прямой l на данную плоскость, содержащую прямую n . Возьмем на прямой l произвольную точку A , отличную от O . Пусть AB есть перпендикуляр к плоскости. Кроме того, пусть отрезок BC перпендикулярен прямой n . Отметим, что AC перпендикулярно прямой n , так как его проекция BC перпендикулярна прямой n по построению.

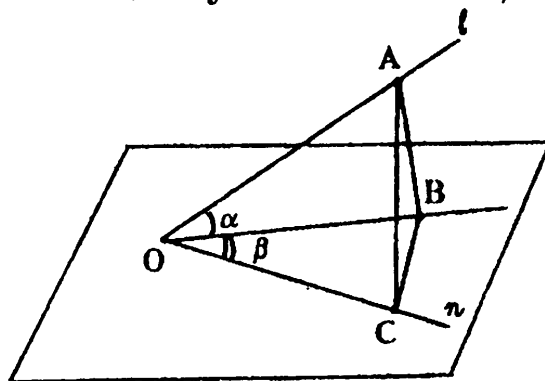


Рис. 101.

В результате имеем соотношения $OC = OB \cos \beta$ и $OB = OA \cos \alpha$, поэтому $OC = OA \cos \alpha \cos \beta$.

Если γ – искомый угол AOC , то $OC = OA \cos \gamma$. Следовательно, $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$, откуда $\gamma = \arccos(\cos \alpha \cos \beta)$.

38. $\arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right)$.

Решение. Как и в решении задачи 37, мы приходим к соотношению $\cos \alpha = \cos \gamma \cos \beta$, где $\alpha = \angle AOC$ и $\beta = \angle BOC$

– заданные углы, а $\gamma = \angle AOB$ – искомый угол. Следовательно, $\cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$, т.е. $\gamma = \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)$.

$$39. \frac{\pi a^3}{24} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\beta}{2}}{\sin^3 \frac{\beta}{2}}.$$

Решение. Пусть $AB = a$ – данная хорда, SO – высота конуса, точка C является серединой хорды AB (рис. 102). Тогда по условию задачи $\angle SCO = \alpha$ и $\angle AOB = \beta$.

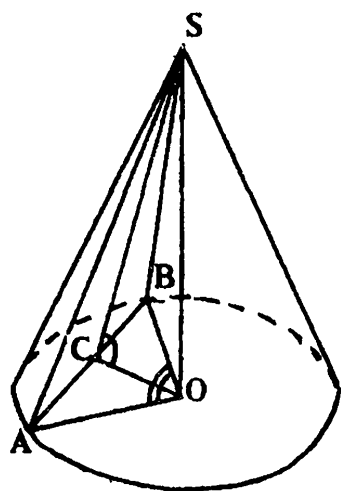


Рис. 102.

Радиус основания

$$R = AO = \frac{AC}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2}}.$$

Кроме того, $CO = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, поэтому $SO = CO \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, искомый объем конуса

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot SO = \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi a^3}{24} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\beta}{2}}{\sin^3 \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

$$40. \frac{\pi}{3} \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot S^{3/2}.$$

Решение. Пусть осевое сечение конуса есть треугольник ASB . Тогда $\angle SAB = \alpha$, $OA = R$ – радиус основания, а $SO = R \operatorname{tg} \alpha$ есть высота конуса. Следовательно, площадь осевого сечения конуса $S = \frac{1}{2} AB \cdot SO = \frac{1}{2} 2R \cdot R \operatorname{tg} \alpha = R^2 \operatorname{tg} \alpha$, откуда получаем $R = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg} \alpha}}$.

Таким образом, объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{S}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^{3/2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{3} \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot S^{3/2}.$$

41. $\sqrt{\frac{S_1(S_2 - S_1)}{\pi(S_2 + S_1)}}.$

Решение. Пусть r – радиус основания, l – образующая конуса. Тогда $S_1 = \pi r^2$, $S_2 = \pi rl$. Кроме того, радиус вписанного шара R равен радиусу вписанной в треугольник ASB окружности, где треугольник ASB есть сечение конуса плоскостью, проходящей через высоту конуса (рис. 103). Если O – центр вписанной окружности, то $OD = OE = R$, причем точка касания E является серединой основания AB и $EB = DB = r$.

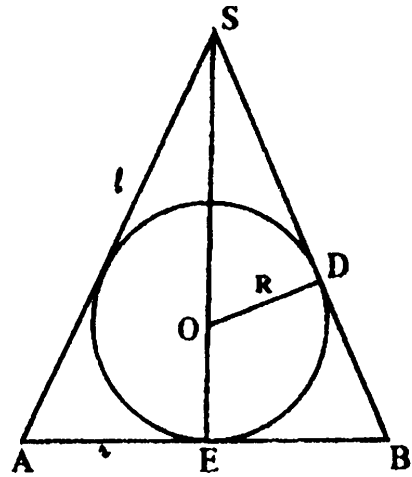


Рис. 103.

В результате получаем, что $SD = l - r$. Но из подобия треугольников ESB и OSD следует, что $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l - r}$, поэтому

$$R = \frac{r(l - r)}{\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{r \left(1 - \frac{r}{l}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}}.$$

Так как $r = \sqrt{S_1/\pi}$ и $r/l = S_1/S_2$, искомый радиус

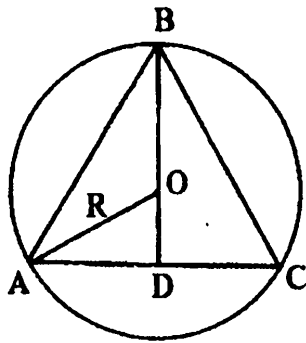
$$R = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} \frac{1 - \frac{S_1}{S_2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{S_1(S_2 - S_1)}{\pi(S_2 + S_1)}}.$$

$$42. \frac{S^3 + 9\pi V^2}{6\pi SV}.$$

Решение. Если h – высота конуса, а r – радиус основания, то площадь основания $S = \pi r^2$, а объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Следовательно, $r = \sqrt{S/\pi}$, $h = 3V/S$.

Ясно, что искомый радиус описанного шара совпадает с радиусом окружности, описанной около осевого сечения конуса.

Пусть треугольник ABC есть осевое сечение конуса, $h =$



$= BD$ – высота треугольника и R – искомый радиус описанной окружности. Тогда $OA = R$ (рис. 104), $OB = R$ и $AD = r$. Следовательно, из треугольника AOD получаем $R^2 = r^2 + (h - R)^2$, т.е. $2hR = r^2 + h^2$, откуда

Рис. 104.

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h} = \frac{\frac{S}{\pi} + \frac{9V^2}{S^2}}{2 \cdot \frac{3V}{S}} = \frac{(S^3 + 9\pi V^2)S}{\pi S^2 \cdot 6V} = \frac{S^3 + 9\pi V^2}{6\pi SV}.$$

$$43. \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha \right).$$

Решение. В данном конусе радиус основания $AO = R$ (рис. 105). Тогда $OS = 2R$ по условию задачи, поэтому

$$\frac{OS}{AS} = \frac{OS}{\sqrt{AO^2 + OS^2}} = \frac{2R}{\sqrt{R^2 + 4R^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Но в прямоугольном треугольнике ASB гипотенуза $BS = \frac{AS}{\cos \alpha}$, а в треугольнике SOB она равна $\frac{OS}{\sin \beta}$, где $\beta = \angle OBS$.

Следовательно, $\sin \beta = \frac{OS}{BS} = \cos \alpha \frac{OS}{AS} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha$. Так как угол β острый, из последнего соотношения получаем $\beta = \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha \right)$.

44. $\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin \alpha} R \quad (\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2).$

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$, где BC есть проекция AB на плоскость основания.

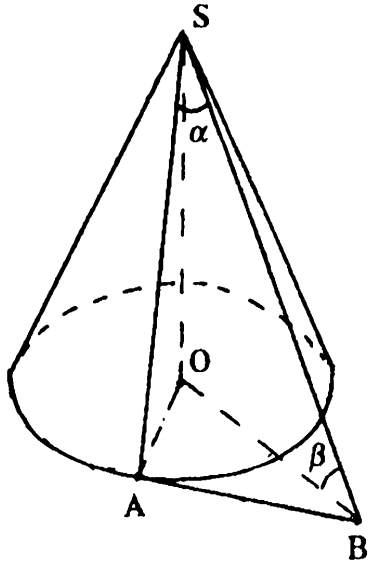


Рис. 105.

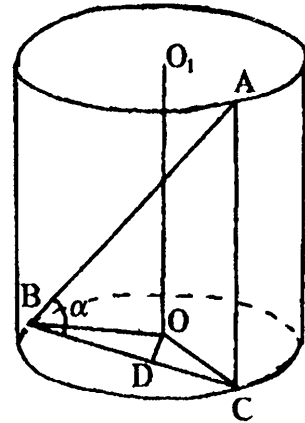


Рис. 106.

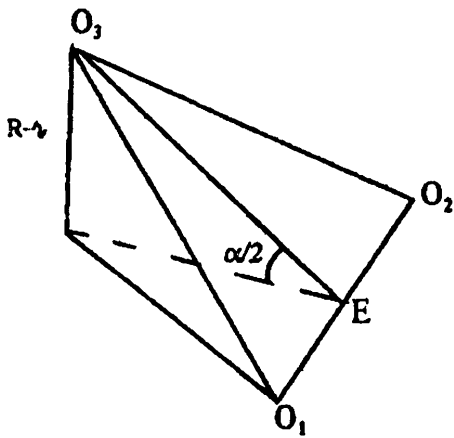
Пусть O и O_1 – центры нижнего и верхнего оснований цилиндра (рис. 106), отрезок OD перпендикулярен хорде BC . Кратчайшим расстоянием между двумя непараллельными и непересекающимися прямыми в пространстве служит отрезок прямой, перпендикулярной к ним обеим. Проекцией этого отрезка на плоскость основания является отрезок OD . В то же время получаем

$$\begin{aligned} OD &= \sqrt{OC^2 - DC^2} = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{AC \operatorname{ctg} \alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \\ &= R \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = R \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Отметим, что в данном цилиндре $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$, поэтому $-\cos 2\alpha \geq 0$.

$$45. \frac{r}{R} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}.$$

Решение. Плоскость, проходящая через центры шаров O_1, O_2, O_3 , делит рассматриваемый угол на две равные части.



Пусть O_3E – высота треугольника $O_1O_2O_3$ (рис. 107). Очевидно, что $O_3O_1 = R + r$, $O_1E = O_2E = r$, поэтому $O_3E = \sqrt{(R + r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr}$, откуда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R - r}{\sqrt{R^2 + 2Rr}} = \frac{1 - x}{\sqrt{1 + 2x}},$$

где $x = r/R$.

Рис. 107.

Если $\alpha = \pi/2$, то $\sin(\alpha/2) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, $\frac{1-x}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, что после преобразований приводит к квадратному уравнению $2x^2 - 6x + 1 = 0$ для определения неизвестной x . Решая это уравнение, получаем $\frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Отметим, что $\frac{3 + \sqrt{7}}{2} > 1$ и $0 < \frac{3 - \sqrt{7}}{2} < 1$, поэтому $x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$ является посторонним решением, а $x = \frac{r}{R} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ – искомым отношением радиусов r и R .

$$46. \sqrt{\frac{1}{3}(R^2 + r^2 \pm \sqrt{(R^2 + r^2)^2 - 3(R^2 - r^2)^2})}$$

($R \leq \sqrt{2 + \sqrt{3}} r$), где знак "плюс" соответствует случаю, когда центр шаров лежит внутри куба.

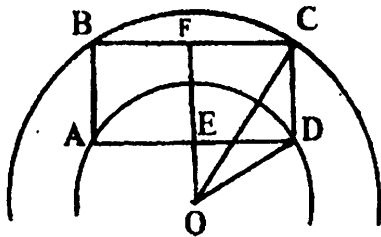


Рис. 108.

Решение. Рассмотрим два ребра куба, которые вместе с центром сфер лежат в одной плоскости. Указанная плоскость этим полностью определена. Рассмотрим тогда сечение этой плоскостью (рис. 108). Пусть точка O – центр сфер, AD и BC – диагонали двух сторон куба, пересекаемых плоскостью на равные части.

Кроме того, пусть OF перпендикулярно BC , a — ребро куба. Тогда $FC = ED = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Рассматривая треугольники ODE и OCF , получаем соотношения

$$OE^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = r^2, \quad OF^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = R^2.$$

Следовательно,

$$OE = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2}}, \quad OF = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

В результате имеем

$$a = OF - OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2}},$$

поэтому

$$a^2 = (R^2 + r^2) - 2\sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)} - a^2,$$

т.е.

$$2\sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)} = R^2 + r^2 - 2a^2.$$

Еще раз возводя в квадрат, получаем для неизвестной $x = a^2$ квадратное уравнение $3x^2 - 2(R^2 + r^2)x + (R^2 - r^2)^2 = 0$.

Таким образом,

$$x = \frac{1}{3}\left(R^2 + r^2 \pm \sqrt{(R^2 + r^2)^2 - 3(R^2 - r^2)^2}\right),$$

откуда находим a .

Отметим, что условие разрешимости есть $R^2 + r^2 \geq \sqrt{3}(R^2 - r^2)$, т.е. $(1 - \sqrt{3})R^2 \geq -(1 + \sqrt{3})r^2$. Следовательно,

$$1 \leq \frac{R^2}{r^2} \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$47. \frac{k - \sqrt{2k^2 - 2k}}{k} R \quad (1 < k < 2).$$

Решение. Пусть x – расстояние от центра шара до секущей плоскости. Если r – радиус круга, полученного в сечении шара этой плоскостью, то $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Полная поверхность имеет площадь $2\pi r^2 + 4\pi Rx$. Следовательно, для x можем записать уравнение

$$2\pi(R^2 - x^2) + 4\pi Rx = \frac{4\pi R^2}{k},$$

откуда $kx^2 - 2kRx + (2 - k)R^2 = 0$.

Таким образом, $x = \frac{k \pm \sqrt{2k^2 - 2k}}{k} R$ ($k \geq 1$). Здесь решение $x = \frac{k + \sqrt{2k^2 - 2k}}{k} R$ является посторонним. Кроме того, из очевидного ограничения $0 \leq x \leq R$ получаем, что $\sqrt{2k^2 - 2k} \leq k$, т.е. $k \leq 2$. Отметим также, что при $k = 2$ секущие плоскости сливаются и $x = 0$.

$$48. \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{k}} - 1 \right) R \quad (k > 4/3).$$

Решение. Пусть x – расстояние от центра шара до секущей плоскости. Если r – радиус круга, полученного в сечении шара этой плоскостью, то $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно, полная поверхность имеет площадь $\pi r^2 + 2\pi R \cdot (R - x) = \pi(R^2 - x^2) + 2\pi(R^2 - Rx) = \pi(3R^2 - 2Rx - x^2)$. В результате получаем уравнение

$$\pi(3R^2 - 2Rx - x^2) = \frac{4\pi R^2}{k},$$

откуда после преобразований имеем квадратное уравнение для определения неизвестной x :

$$x^2 + 2Rx + \left(\frac{4}{k} - 3 \right) R^2 = 0.$$

Таким образом,

$$x = \left(-1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{k} - 3 \right)} \right) R = \left(-1 \pm 2\sqrt{1 - \frac{1}{k}} \right) R.$$

Здесь решение $x = \left(-1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{k}} \right) R$ является посторонним.

В заключение отметим, что ограничение

$$x = \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{k}} - 1 \right) R \geq 0$$

приводит к неравенству $2\sqrt{k^2 - k} - k \geq 0$, откуда следует, что $k \geq \frac{4}{3}$.

49. $\frac{8\pi}{3}r^3, 8\pi r^2.$

Решение. На рис. 109 изображено осевое сечение конуса, высота треугольника ABC есть $BO = h = 4r$, $O_1D = O_1O = r$ — радиус шара, $OC = R$ — радиус основания конуса, $BC = l$ — длина образующей. Так как треугольники O_1BD и OBC подобные как прямоугольные треугольники с общим острым углом, запишем пропорцию $\frac{O_1B}{BC} = \frac{O_1D}{OC}$, т.е. $\frac{3r}{l} = \frac{r}{R}$, поэтому $l = 3R$.

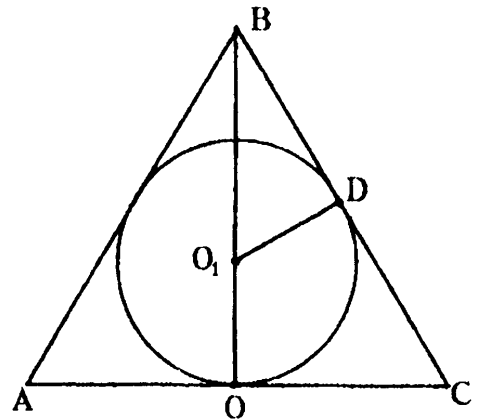


Рис. 109.

Однако $9R^2 = l^2 = 16r^2 + R^2$, поэтому $R^2 = 2r^2$ и $R = \sqrt{2}r$. Следовательно, $l = 3\sqrt{2}r$.

Таким образом, объем конуса

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3} \cdot 2r^2 \cdot 4r = \frac{8\pi}{3}r^3,$$

а полная поверхность

$$S = \pi R^2 + \pi Rl = 2\pi r^2 + \pi\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}r^2 = 8\pi r^2.$$

$$50. \frac{\pi\sqrt{6}}{108}a^3; \frac{\pi}{3}a^2.$$

Решение. Образующей конуса является апофема тетраэдра. Ее длина $l = \sqrt{a^2 - a^2/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Кроме того, основанием конуса служит круг, вписанный в грань тетраэдра. Его радиус $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Наконец, высота конуса

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}}a = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Таким образом, объем конуса

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2}{3}}a^3 = \frac{\pi\sqrt{6}}{108}a^3,$$

а полная поверхность

$$S = \pi r^2 + \pi lr = \pi \frac{a^2}{12} + \pi \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}a^2 = \pi \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) a^2 = \frac{\pi}{3}a^2.$$

$$51. \frac{9\pi}{32}a^3.$$

Решение. Через ребро тетраэдра BC проведем сечение плоскостью, параллельной основанию цилиндра. Рассмотрим в этой плоскости треугольник KCB , где точка K лежит на ребре AS (рис. 110). В этом треугольнике $BC = a$, $CK = BK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, так как треугольник AKC прямоугольный, $AC = a$ и $AK = a/2$. В результате для радиуса описанной окружности получаем

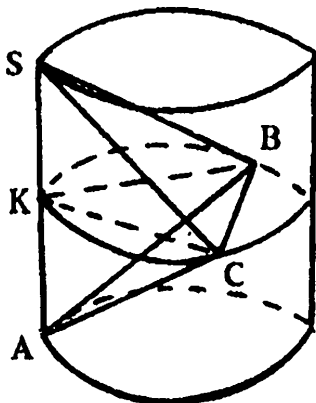


Рис. 110.

$$R = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a}{4S} = \frac{3a^3}{16S},$$

где площадь

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{3a^3 \cdot 2\sqrt{2}}{16a^2} = \frac{3\sqrt{2}a}{8},$$

поэтому искомый объем

$$V = \pi R^2 a = \pi \frac{18}{64} a^3 = \frac{9\pi}{32} a^3.$$

52. $\frac{ab}{2c}, \frac{bc}{2a}, \frac{ac}{2b}.$

Решение. Если r_1, r_2, r_3 — радиусы данных шаров, касающихся плоскости в вершинах C, A, B соответственно, то справедливы соотношения $(r_2 - r_1)^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2$, $(r_2 - r_3)^2 + c^2 = (r_2 + r_3)^2$, $(r_1 - r_3)^2 + a^2 = (r_1 + r_3)^2$. Отсюда получаем $4r_1r_2 = b^2$, $4r_2r_3 = c^2$, $4r_1r_3 = a^2$, поэтому

$$(r_1r_2r_3)^2 = \frac{(abc)^2}{64},$$

т.е. $r_1r_2r_3 = \frac{abc}{8}.$

Таким образом,

$$r_1 = \frac{abc}{8r_2r_3} = \frac{4abc}{8c^2} = \frac{ab}{2c}$$

и аналогично $r_2 = \frac{bc}{2a}$, $r_3 = \frac{ac}{2b}.$

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Предисловие..... | 3 |
| Глава 1. Арифметика. Текстовые задачи..... | 7 |
| Глава 2. Алгебра. Уравнения и неравенства | 20 |
| Глава 3. Начала анализа. Задачи на наибольшее и наименьшее значение | 31 |
| Глава 4. Тригонометрические уравнения и неравенства | 38 |
| Глава 5. Задачи по планиметрии | 44 |
| Глава 6. Задачи по стереометрии | 55 |
| Ответы и решения..... | 62 |
| К главе 1 | — |
| К главе 2 | 98 |
| К главе 3 | 177 |
| К главе 4 | 210 |
| К главе 5 | 273 |
| К главе 6 | 331 |